Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

13. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Man kann A dann mittels Matrixmultiplikation als Operator von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ auffassen. Zeige, dass $\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ gilt! (2)

14. Sei $\mathrm{C}_0(0,1] := \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} \text{ stetig}, f(0) = 0\}$. Zeige:

(a) $\mathrm{C}_0(0,1]$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $\mathrm{C}[0,1]$. (1)

(b) Es gibt eine Funktion $u \in \mathrm{C}[0,1] \setminus \mathrm{C}_0(0,1]$ mit $\mathrm{C}_0(0,1] \oplus \operatorname{span}\{u\} = \mathrm{C}[0,1]$. Man sagt auch, $\mathrm{C}_0(0,1]$ habe *Kodimension* 1 *in* $\mathrm{C}[0,1]$. (1)

(c) Sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $\mathrm{C}_0(0,1]$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

(1) Zu allen Paaren $x, y \in (0,1]$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$.

(2) Zu jedem $x \in (0,1]$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $\mathrm{C}_0(0,1]$. (4)

Bemerkung: Dies ist eine Variante des Satzes von Stone-Weierstraß für $\mathrm{C}_0(0,1]$.
Tipp: Wende den Satz von Stone-Weierstraß in $\mathrm{C}[0,1]$ auf eine passend konstruierte Algebra an!

(d) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := x^n$ ist total in $\mathrm{C}_0(0,1]$. (1)

15. Betrachte $M_\alpha\colon c_0 \to c_0$ definiert durch $M_\alpha x := (\alpha_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit einer beschränkten Folge $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$. Zeige:

(a) M_α ist wohldefiniert, d.h. M_α bildet c_0 tatsächlich nach c_0 ab. (1)

(b) M_α ist stetig. (1)

(c) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$. (1)

(d) Ist $\alpha_n = \frac{n-1}{n}$, so ist $\|M_\alpha\| = 1$. Es gibt aber keinen Vektor $x \in c_0$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ und $\|M_\alpha x\|_\infty = 1$. (2)

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass das Supremum in der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ im Allgemeinen kein Maximum ist.

16. Zeige:

(a) Für jedes $a \in \ell^1$ definiert $\varphi_a\colon c_0 \to \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) := \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ eine lineare, stetige Funktion. (1)

(b) Für jedes $a \in \ell^1$ gilt $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$. (2)

(c) Zu jeder linearen, stetigen Funktion $\varphi\colon c_0 \to \mathbb{R}$ existiert genau ein $a \in \ell^1$ mit $\varphi = \varphi_a$. (3)