

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4

13. Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Man kann A dann mittels Matrixmultiplikation als Operator von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ nach $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ auffassen. Zeige, dass $\|A\| = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$ gilt! (2)

Lösung: Sei $c := \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$. Wegen

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right) |x_j| \leq c \sum_{j=1}^n |x_j| = c \|x\|_1$$

ist $\|A\| \leq c$. Sei nun j_0 so gewählt, dass $\sum_{i=1}^m |a_{ij_0}| = c$ ist. Dann ist

$$\|Ae_{j_0}\|_1 = \sum_{i=1}^m |a_{ij_0}| = c$$

und $\|e_{j_0}\|_1 = 1$, woraus laut Vorlesung $\|A\| \geq c$ folgt. Insgesamt ist also $\|A\| = c$ gezeigt.

14. Sei $C_0(0, 1] := \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}, f(0) = 0\}$. Zeige:

- (a) $C_0(0, 1]$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $C[0, 1]$. (1)

Lösung: Natürlich ist die Nullfunktion in $C_0(0, 1]$. Sind $f, g \in C_0(0, 1]$, so sind offenbar auch wieder αf , $f + g$ und fg stetig und nehmen bei 0 den Wert 0 an. Die Menge ist also eine Unteralgebra.

Sei $x \in [0, 1]$ beliebig. Die Punktauswertung $A_x: C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ ist offenbar linear und erfüllt $|A_x f| = |f(x)| \leq \|f\|_\infty$, ist also in $\mathcal{L}(C[0, 1], \mathbb{R})$ und damit stetig. Daher sind die Mengen $A_x^{-1}(\{0\})$ als Urbilder abgeschlossener Mengen unter einer stetigen Funktion wieder abgeschlossen, und daher auch die Menge $C_0(0, 1] = A_0^{-1}(\{0\})$.

- (b) Es gibt eine Funktion $u \in C[0, 1] \setminus C_0(0, 1]$ mit $C_0(0, 1] \oplus \text{span}\{u\} = C[0, 1]$. Man sagt auch, $C_0(0, 1]$ habe *Kodimension 1* in $C[0, 1]$. (1)

Lösung: Wähle $u(x) := 1$. Es ist nur zu zeigen, dass sich jedes $g \in C[0, 1]$ in der Form $g = f + \alpha u$ mit $f \in C_0(0, 1]$ schreiben lässt. Dies erreicht man mit $\alpha := g(0)$ und $f := g - \alpha u$ wie man leicht nachrechnet.

- (c) Sei $\mathcal{A}$ eine Unteralgebra von $C_0(0, 1]$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

- (1) Zu allen Paaren $x, y \in (0, 1]$ mit $x \neq y$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$.
(2) Zu jedem $x \in (0, 1]$ gibt es ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$.

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C_0(0, 1]$. (4)

Bemerkung: Dies ist eine Variante des Satzes von Stone-Weierstraß für $C_0(0, 1]$.

Tipp: Wende den Satz von Stone-Weierstraß in $C[0, 1]$ auf eine passend konstruierte Algebra an!

Lösung: Sei wieder u gegeben durch $u(x) := 1$. Die Menge $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \oplus \text{span}\{u\}$ ist ein Unterraum von $C[0, 1]$. Sie ist sogar eine Unteralgebra, denn zu $g_1, g_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$ gibt es Darstellungen $g_1 = f_1 + \alpha_1 u$ und $g_2 = f_2 + \alpha_2 u$ mit $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist aber $g_1 g_2 = f_1 f_2 + \alpha_1 f_2 + \alpha_2 f_1 + \alpha_1 \alpha_2 u$ dank der Algebrastruktur von $\mathcal{A}$ wieder in $\tilde{\mathcal{A}}$. Nach Konstruktion ist $u = 1 \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Um den Satz von Stone-Weierstraß auf $\tilde{\mathcal{A}}$ anwenden zu können, ist also nur noch zu zeigen, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ punktetrennend ist. Seien dazu $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$. Sind $x, y \in (0, 1]$,

so gibt es nach Voraussetzung $f \in \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Ist aber $x = 0$, so gibt es nach Voraussetzung $f \in \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}$ mit $f(x) = 0 \neq f(y)$. Der Fall $y = 0$ ist analog. Also trennt $\tilde{\mathcal{A}}$ (genauer sogar bereits $\mathcal{A}$) die Punkte von $[0, 1]$. Es folgt aus dem Satz von Stone-Weierstraß, dass $\tilde{\mathcal{A}}$ in $C[0, 1]$ dicht ist.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{A}$ in $C_0(0, 1]$ dicht ist. Sei dazu $g \in C_0(0, 1] \subset C[0, 1]$ beliebig. Nach dem soeben gezeigten gibt es eine Folge (g_n) mit $g_n = f_n + \alpha_n u$, $f_n \in \mathcal{A}$, $\alpha_n \in \mathbb{R}$, mit $\|g_n - g\|_\infty \rightarrow 0$. Insbesondere gilt dann $\alpha_n = g_n(0) \rightarrow g(0) = 0$. Daraus folgt aber

$$\|f_n - g\|_\infty \leq \|f_n + \alpha_n u - g\|_\infty + \|\alpha_n u\|_\infty = \|g_n - g\|_\infty + |\alpha_n| \rightarrow 0.$$

Dies zeigt, dass es eine Folge in $\mathcal{A}$ gibt, nämlich (f_n) , die gegen g konvergiert. Weil g beliebig war, folgt die Behauptung.

- (d) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $f_n(x) := x^n$ ist total in $C_0(0, 1]$. (1)

Lösung: Es ist sehr leicht zu prüfen, dass der aufgepannte Unterraum, der sich auch als $\{\sum_{k=1}^n \alpha_k x^k : n \in \mathbb{N}\}$ schreiben lässt, eine Algebra ist. Für die Kriterien aus (c) kann man jeweils f mit $f(x) = x$ wählen. Es folgt also mit dem soeben Bewiesenen die Behauptung.

15. Betrachte $M_\alpha : c_0 \rightarrow c_0$ definiert durch $M_\alpha x := (\alpha_n x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit einer beschränkten Folge $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$. Zeige:

- (a) M_α ist wohldefiniert, d.h. M_α bildet c_0 tatsächlich nach c_0 ab. (1)

Lösung: Es ist offenbar $|\alpha_n x_n| \leq \|\alpha\|_\infty |x_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Weil die rechte Seite gegen 0 geht, ist offenbar $M_\alpha x$ eine Nullfolge.

- (b) M_α ist stetig. (1)

Lösung: Bildet man bei obiger Abschätzung auf beiden Seiten das Supremum bezüglich n , so erhält man $\|M_\alpha x\| \leq \|\alpha\|_\infty \|x\|_\infty$. Laut Vorlesung zeigt dies die Stetigkeit von M_α . Zudem folgt $\|M\| \leq \|\alpha\|_\infty$.

- (c) $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty$. (1)

Lösung: Es wurde bereits $\|M\| \leq \|\alpha\|_\infty$ gezeigt. Sei $m := \|\alpha\|_\infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_{n_0}| \geq m - \varepsilon$. Wählt man den Einheitsvektor $e_{n_0} \in c_0$, so zeigt sich $\|M_\alpha e_{n_0}\| = \|\alpha_{n_0} e_{n_0}\| = |\alpha_{n_0}| \geq m - \varepsilon$. Nach Vorlesung gilt also $\|M_\alpha\| \geq m - \varepsilon$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $\|M_\alpha\| \geq m = \|\alpha\|_\infty$. Dies beweist die Behauptung.

- (d) Ist $\alpha_n = \frac{n-1}{n}$, so ist $\|M_\alpha\| = 1$. Es gibt aber keinen Vektor $x \in c_0$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$ und $\|M_\alpha x\|_\infty = 1$. (2)

Lösung: Offenbar ist $\|M_\alpha\| = \|\alpha\|_\infty = 1$. Sei nun $x \in c_0$ mit $\|x\|_\infty \leq 1$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \geq n_0$. Dann ist für $n \leq n_0$

$$|\alpha_n x_n| \leq \frac{n_0 - 1}{n_0} \|x\|_\infty \leq \frac{n_0 - 1}{n_0},$$

wie man daran sieht, dass α_n monoton wachsend ist. Andererseits ist

$$|\alpha_n x_n| \leq \frac{1}{2} \|\alpha\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

für $n \geq n_0$ nach Wahl von n_0 . Insgesamt ist also $\|M_\alpha x\|_\infty \leq \max\{\frac{1}{2}, \frac{n_0-1}{n_0}\} < 1$. Also ist $\|M_\alpha x\|_\infty = 1$ nicht möglich für $x \in c_0$ mit $\|x\|_\infty = 1$.

Bemerkung: Diese Aufgabe zeigt, dass das Supremum in der aus der Vorlesung bekannten Gleichung $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}$ im Allgemeinen kein Maximum ist.

16. Zeige:

- (a) Für jedes $a \in \ell^1$ definiert $\varphi_a: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ eine lineare, stetige Funktion. (1)

Lösung: Wegen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| \leq \|a\|_1 \|x\|_{\infty}$ konvergiert die Reihe (sogar absolut), und es gilt $|\varphi_a(x)| \leq \|a\|_1 \|x\|_{\infty}$. Weil φ_a offenbar linear ist, zeigt dies auch die Stetigkeit von φ_a und $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_1$.

- (b) Für jedes $a \in \ell^1$ gilt $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$. (2)

Lösung: Die Abschätzung $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_1$ wurde schon gezeigt. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig und betrachte nun speziell die Folge $x \in c_0$ mit $x_n = \operatorname{sgn} a_n$ für $n \leq n_0$ und $x_n = 0$ für $n > n_0$. Dann ist $\|x\|_{\infty} \leq 1$ und

$$\varphi_a(x) = \sum_{n=1}^{n_0} a_n \operatorname{sgn} a_n = \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| \rightarrow \|a\|_1. \quad (n_0 \rightarrow \infty)$$

Mit dem Supremum über $n_0 \in \mathbb{N}$ zeigt dies also

$$\|\varphi_a\| = \sup\{\|\varphi_a(x)\| : x \in c_0, \|x\|_{\infty} \leq 1\} \geq \|a\|_1,$$

was insgesamt $\|\varphi_a\| = \|a\|_1$ zeigt.

- (c) Zu jeder linearen, stetigen Funktion $\varphi: c_0 \rightarrow \mathbb{R}$ existiert genau ein $a \in \ell^1$ mit $\varphi = \varphi_a$. (3)

Lösung: Die Eindeutigkeit sieht man leicht: Seien a und b aus ℓ^1 mit $\varphi_a = \varphi_b$. Dann gilt $a_n = \varphi_a(e_n) = \varphi_b(e_n) = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, was $a = b$ zeigt.

Zum Beweis der Existenz definiere $a_n := \varphi(e_n)$. Es ist zu zeigen, dass $a := (a_n)$ in ℓ^1 liegt und dass $\varphi_a = \varphi$ gilt. Mit $\alpha_n := \operatorname{sgn} a_n$ ist allerdings

$$\sum_{n=1}^{n_0} |a_n| = \sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n \varphi(e_n) = \varphi\left(\sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n e_n\right) \leq \|\varphi\|,$$

da $y := \sum_{n=1}^{n_0} \alpha_n e_n$ in c_0 liegt und $\|y\|_{\infty} \leq 1$ erfüllt. Da ihre Partialsummen beschränkt sind, konvergiert also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, was $a \in \ell^1$ beweist. Zudem gilt nach Definition $\varphi(e_n) = a_n = \varphi_a(e_n)$. Wegen Linearität stimmen φ und φ_a daher auf der Menge $\operatorname{span}\{e_n\}$ überein. Da diese Menge in c_0 dicht ist und ein stetiger Operator laut Vorlesung eine eindeutige Fortsetzung auf den Abschluss seines Definitionsbereichs besitzt, stimmen φ und φ_a also auf ganz c_0 überein. Damit ist die Behauptung bewiesen.