Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 21 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

17. Sei E ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und X ein normierter Vektorraum. Zeige:

(a) Die Einheitskugel $B := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ ist kompakt. (2)

(b) Jede lineare Funktion $T\colon E \to X$ ist stetig. (2)

18. Seien X_1 und X_2 isomorphe normierte Vektorräume. Zeige:

(a) X_1 ist genau dann vollständig, wenn X_2 vollständig ist. (2)

(b) X_1 ist genau dann separabel, wenn X_2 separabel ist. (2)

(c) Sind Y_1 und Y_2 zueinander isomorphe normierte Vektorräume, so sind auch die Räume $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$ und $\mathscr{L}(X_2, Y_2)$ zueinander isomorph. (4)

19. Zeige, dass folgende Aussagen für einen normierten Raum X äquivalent sind: (4)

(i) X ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe in X ist konvergent. Das soll bedeuten: Ist (x_n) eine Folge in X mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, so konvergiert die Folge $(\sum_{k=1}^{N} x_k)$ der Partialsummen gegen ein $x \in X$.

20. Sei X ein Vektorraum mit Basis $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$. Das bedeutet, dass jeder Vektor $x \in X$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ mit $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$ und $\#\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} < \infty$ besitzt (die Summe hat also nur endlich viele Summanden und ist daher erklärt). Zeige:

(a) Die Zuordnung $\|x\|_0 := \sup_\alpha |\lambda_\alpha|$ für $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ ist eine Norm auf X. (1)

(b) Sei (x^n) eine Folge in $(X, \|\cdot\|_0)$, $x^n = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha^n x_\alpha$, die gegen $x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ konvergiert. Dann konvergiert für jedes $\alpha \in I$ auch λ_α^n gegen λ_α. (1)

(c) Der Raum $(X, \|\cdot\|_0)$ ist genau dann vollständig, wenn X endlich-dimensional ist. (2)

(d) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum, so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ nicht äquivalent. (1)

Bemerkung: Anders als im endlich-dimensionalen Fall sind also in Banachräumen nicht alle Normen äquivalent.