UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 21 Punkte

# Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 5

**17.** Sei $E$ ein endlich-dimensionaler normierter Vektorraum und $X$ ein normierter Vektorraum. Zeige:

(a) Die Einheitskugel $B := \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ ist kompakt. (2)

**Lösung:** Sei $N := \dim E$ und $\mathbb{K}$ der Skalarkörper von $E$. Laut Vorlesung gibt es einen Isomorphismus $J\colon E \to (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_2)$. Die Menge $K := J(B)$ ist als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter der stetigen Funktion $J^{-1}$ abgeschlossen in $\mathbb{K}^N$. Zudem liegt $K$ in der abgeschlossenen Kugel um 0 mit Radius $\|J\|$, ist also beschränkt. Nach dem Satz von Heine-Borel ist $K$ kompakt, und daher auch das Bild $B = J^{-1}(K)$ von $K$ unter der stetigen Funktion $J^{-1}$.

(b) Jede lineare Funktion $T\colon E \to X$ ist stetig. (2)

**Lösung:** Sei $N := \dim E$ und $\mathbb{K}$ der Skalarkörper von $E$. Wähle eine Basis $(e_n)$ von $E$ und definiere $M := \max\{\|Te_k\|\}$. Es ist leicht zu sehen, dass $\|x\|_1 := \sum_{k=1}^N |\alpha_k|$ mit $x = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$ auf $E$ eine Norm definiert. Laut Vorlesung sind auf endlich-dimensionalen Räumen aber alle Normen äquivalent; es gibt also insbesondere $c > 0$ mit $\|x\|_1 \le c\|x\|$. Für $x \in E$, $x = \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k$ gilt dann also

$$\|Tx\| = \left\|\sum_{k=1}^N \alpha_k Te_k\right\| \le \sum_{k=1}^N |\alpha_k|\,\|Te_k\| \le M\,\|x\|_1 \le Mc\|x\|,$$

was die Stetigkeit von $T$ und genauer sogar $\|T\| \le Mc$ zeigt.

**18.** Seien $X_1$ und $X_2$ isomorphe normierte Vektorräume. Zeige:

(a) $X_1$ ist genau dann vollständig, wenn $X_2$ vollständig ist. (2)

**Lösung:** Sei $X_1$ vollständig und $J\colon X_1 \to X_2$ ein Isomorphismus. Sei $(y_n)$ eine Cauchyfolge in $X_2$ und definiere $x_n := J^{-1}y_n$. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|x_n - x_m\| = \|J^{-1}y_n - J^{-1}y_m\| \le \|J^{-1}\| \cdot \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

für alle $n, m \ge n_0$. Also ist $(x_n)$ eine Cauchyfolge in $X_1$ und daher konvergent gegen ein $x \in X_1$. Wegen Stetigkeit konvergiert $y_n = Jx_n$ dann gegen $y := Jx$. Wir haben gezeigt, dass jede Cauchyfolge aus $X_2$ konvergiert, dass also $X_2$ vollständig ist.

Die andere Implikation folgt, indem man die Rollen von $X_1$ und $X_2$ vertauscht und den Isomorphismus $J^{-1}$ betrachtet.

**Bemerkung:** Die wesentliche Beobachtung des Beweises ist, dass ein Isomorphismus Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen und konvergente Folgen auf konvergente Folgen abbildet.

(b) $X_1$ ist genau dann separabel, wenn $X_2$ separabel ist. (2)

**Lösung:** Sei $D_1$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von $X_1$ und sei $J\colon X_1 \to X_2$ ein Isomorphismus. Definiere $D_2 := \{Jx : x \in D_1\}$. Dann ist $D_2$ eine dichte Teilmenge von $X_2$. Sei $y \in X_2$ beliebig. Dann gibt es eine Folge $(x_n)$ in $D_1$, die gegen $x := J^{-1}y$ konvergiert. Wegen Stetigkeit konvergiert dann $(y_n)$ mit $y_n := Jx_n \in D_2$ gegen $Jx = y$, was zeigt, dass $D_2$ in $X_2$ dicht ist. Es gibt also eine abzählbare, dichte Teilmenge von $X_2$, und damit ist $X_2$ separabel.

Die andere Implikation folgt durch Vertauschen der Rollen von $X_1$ und $X_2$.

(c) Sind $Y_1$ und $Y_2$ zueinander isomorphe normierte Vektorräume, so sind auch die Räume $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$ und $\mathscr{L}(X_2, Y_2)$ zueinander isomorph. (4)

**Lösung:** Seien $J_X\colon X_1 \to X_2$ und $J_Y\colon Y_1 \to Y_2$ Isomorphismen. Definiere die Abbildung $J\colon \mathscr{L}(X_1, Y_1) \to \mathscr{L}(X_2, Y_2)$ durch $J(T) := J_Y T J_X^{-1}$. Laut Vorlesung liegt $J(T)$ tatsächlich in $\mathscr{L}(X_2, Y_2)$, wenn $T$ in $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$ ist. Die Linearität von $J$ ist leicht nachzurechnen.

Es muss noch gezeigt werden, dass $J$ ein Isomorphismus ist. Aus der Abschätzung

$$\|J(T)\|_{\mathscr{L}(X_2,Y_2)} \leq \|J_Y\|_{\mathscr{L}(Y_1,Y_2)} \|T\|_{\mathscr{L}(X_1,Y_1)} \|J_X^{-1}\|_{\mathscr{L}(X_2,X_1)}$$

sieht man die Stetigkeit von $J$ und genauer sogar $\|J\| \leq \|J_Y\| \left\|J_X^{-1}\right\|$. Die Inverse von $J$ ist gegeben durch $\widetilde{J}\colon \mathscr{L}(X_2, Y_2) \to \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ mit $\widetilde{J}(S) := J_Y^{-1} S J_X$, denn

$$\widetilde{J}(J(T)) = \widetilde{J}(J_Y T J_X^{-1}) = J_Y^{-1} J_Y T J_X^{-1} J_X = T$$

und

$$J(\widetilde{J}(S)) = J(J_Y^{-1} S J_X) = J_Y J_Y^{-1} S J_X J_X^{-1} = S$$

für alle $T \in \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ und alle $S \in \mathscr{L}(X_2, Y_2)$. Also ist $J$ bijektiv und die Inverse $J^{-1} = \widetilde{J}$ mit dem gleichen Argument wie oben stetig, wobei man genauer sogar $\|J^{-1}\| \leq \left\|J_Y^{-1}\right\| \|J_X\|$ erhält.

Wir haben gezeigt, dass $J$ ein Isomorphismus der beiden Räume ist, nach Definition die beiden Räume also isomorph sind.

**Bemerkung:** Dieser Beweis zeigt auch, dass $J$ sogar eine Isometrie ist, falls $J_X$ und $J_Y$ Isometrien sind, denn dann ist $\|J\| \leq 1$ und $\|J^{-1}\| \leq 1$. Sind also sowohl $X_1$ und $X_2$ als auch $Y_1$ und $Y_2$ isometrisch isomorph, so auch $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$ und $\mathscr{L}(X_2, Y_2)$.

**19.** Zeige, dass folgende Aussagen für einen normierten Raum $X$ äquivalent sind: (4)

(i) $X$ ist vollständig.

(ii) Jede absolut konvergente Reihe in $X$ ist konvergent. Das soll bedeuten: Ist $(x_n)$ eine Folge in $X$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, so konvergiert die Folge $(\sum_{k=1}^{N} x_k)$ der Partialsummen gegen ein $x \in X$.

**Lösung:** Sei zuerst $X$ vollständig. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$, so ist $(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0$ so groß, dass $\sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ gilt. Dann ist

$$\Big\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \Big\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \|x_k\| < \varepsilon$$

für alle $m, n \geq n_0$ und daher $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $X$. Die Reihe konvergiert also wegen Vollständigkeit von $X$.

Es gelte nun die zweite Eigenschaft. Sei $(x_n)$ eine Cauchyfolge in $X$. Konstruiere induktiv eine Teilfolge $(x_{n_k})$ von $(x_n)$ mit $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$; wähle dazu $n_k > n_{k-1}$ immer so groß, dass $\|x_\ell - x_{n_k}\| < 2^{-k}$ für alle $\ell \geq n_k$ gilt, was nach Voraussetzung möglich ist. Nun ist also $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty$ und daher die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ nach Voraussetzung konvergent. Anders gesagt konvergiert die Folge

$$\Big( \sum_{k=1}^{N} (x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \Big)_{N\in\mathbb{N}} = \Big( x_{n_{N+1}} - x_{n_1} \Big)_{N\in\mathbb{N}}.$$

Also konvergiert auch die Folge $(x_{n_{N+1}})_{N\in\mathbb{N}}$. Wenn aber eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge besitzt, konvergiert bereits die Cauchyfolge selbst, wie in der Vorlesung gezeigt wurde und man leicht nachprüfen kann. Also ist jede Cauchyfolge konvergent und damit $X$ vollständig.

**20.** Sei $X$ ein Vektorraum mit Basis $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Das bedeutet, dass jeder Vektor $x \in X$ eine eindeutige Darstellung der Form $x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ mit $\lambda_\alpha \in \mathbb{K}$ und $\#\{\alpha \in I : \lambda_\alpha \neq 0\} < \infty$ besitzt (die Summe hat also nur endlich viele Summanden und ist daher erklärt). Zeige:

(a) Die Zuordnung $\|x\|_0 := \sup_\alpha |\lambda_\alpha|$ für $x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ ist eine Norm auf $X$. (1)

**Lösung:** Weil jeweils nur endlich viele $\lambda_\alpha$ nicht 0 sind, ist für jedes $x \in X$ also $0 \leq \|x\|_0 < \infty$. Ist $\|x\|_0 = 0$, so ist $\lambda_k = 0$ für alle $k$ und daher $x = 0$. Aus der Gleichung $\mu x = \sum_{\alpha\in I}(\mu\lambda_\alpha)x_\alpha$ sieht man sofort $\|\alpha x\|_0 = |\alpha|\|x\|_0$, und aus $x + y = \sum_{\alpha\in I}(\lambda_\alpha + \mu_\alpha)x_k$, wobei hier $y = \sum_{\alpha\in I} \mu_\alpha x_k$ gelten soll, ergibt sich wiederum $\|x + y\|_0 = \sup_\alpha |\lambda_\alpha + \mu_\alpha| \leq \|x\|_0 + \|y\|_0$.

(b) Sei $(x^n)$ eine Folge in $(X, \|\cdot\|_0)$, $x^n = \sum_{\alpha\in I} \lambda^n_\alpha x_\alpha$, die gegen $x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha x_\alpha$ konvergiert. Dann konvergiert für jedes $\alpha \in I$ auch $\lambda^n_\alpha$ gegen $\lambda_\alpha$. (1)

**Lösung:** Es ist $x^n - x = \sum_{\alpha\in I}(\lambda^n_\alpha - \lambda_\alpha)x_\alpha$, also $\|x^n - x\|_0 = \sup_\alpha |\lambda^n_\alpha - \lambda_\alpha|$, und daher gilt

$$|\lambda^n_\alpha - \lambda_\alpha| \leq \|x^n - x\|_0 \to 0 \quad (n \to \infty)$$

für jedes $\alpha \in I$.

(c) Der Raum $(X, \|\cdot\|_0)$ ist genau dann vollständig, wenn $X$ endlich-dimensional ist. (2)

**Lösung:** Endlich-dimensionale Räume sind laut Vorlesung stets vollständig. Ist aber $X$ unendlich-dimensional, so betrachte eine abzählbare Teilmenge $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset I$ mit $\alpha_k \neq \alpha_\ell$ für $k \neq \ell$. Definiere die Elemente $x^n \in X$ durch $x^n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} x_{\alpha_k}$. Dann ist offenbar $x^n - x^m = \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} x_{\alpha_k}$ für $m < n$, also $\|x^n - x^m\|_0 = \frac{1}{m+1}$, und daher $(x^n)$ eine Cauchyfolge in $(X, \|\cdot\|_0)$. Wäre $(X, \|\cdot\|_0)$ vollständig, so gäbe es also einen Grenzwert $x \in X$, $x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha x_\alpha$, für den $\lambda_{\alpha_k} = \lim_{n\to\infty} \lambda^n_{\alpha_k} = \frac{1}{k} \neq 0$ gelten muss. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass nur endlich viele $\lambda_\alpha$ nicht 0 sind.

(d) Ist $(X, \|\cdot\|)$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum, so sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_0$ nicht äquivalent. (1)

**Lösung:** Nach Voraussetzung ist $(X, \|\cdot\|)$ vollständig, nach dem soeben bewiesenen aber $(X, \|\cdot\|_0)$ nicht. Die beiden Räume sind also nicht isomorph, die Normen also nicht äquivalent.

**Bemerkung:** Anders als im endlich-dimensionalen Fall sind also in Banachräumen nicht alle Normen äquivalent.