Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

21. Zeige:

(a) Die Polynome $P = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{K}\}$ bilden einen Vektorraum. Es gibt aber keine Norm, die P zu einem Banachraum macht. (1)

(b) Sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$. Es gebe für alle $x \in X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = 0$. Dann ist T *nilpotent*; es existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $T^m = 0$. Die Aussage ist aber im Allgemeinen falsch, wenn X nicht vollständig ist. (3)

22. Seien X und Y normierte Räume und $T_n, T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Wir sagen, dass (T_n) *stark gegen T konvergiert*, falls für jedes $x \in X$ die Folge $(T_n x)$ in Y gegen Tx konvergiert.

(a) Seien X, Y und Z Banachräume, $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ und $S_n \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Es konvergiere T_n stark gegen $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und S_n stark gegen $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Zeige, dass dann auch $S_n T_n$ stark gegen ST konvergiert! (2)

(b) Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ konvergiert für jede Folge $y = (y_n) \in c_0$.

(ii) $x \in \ell^1$.

23. Seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $A \subset X$ total in X. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathscr{L}(X,Y)$. Für alle $x \in A$ existiere der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Zeige, dass dann (T_n) stark gegen ein $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ konvergiert! Zeige, dass die Aussage im Allgemeinen falsch ist, wenn man die Forderung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ streicht! (5)

24. (a) Sei X ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X, mit denen der Raum jeweils zu einem Banachraum wird. Für ein $c > 0$ gelte $\|x\|_1 \le c\|x\|_2$ für alle $x \in X$. Zeige, dass es dann eine Konstante α mit $\|x\|_2 \le \alpha\|x\|_1$ für $x \in X$ gibt! (2)

(b) Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien O_n abzählbar viele dichte offene Mengen in M. Zeige, dass dann auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ in M dicht ist! (6)
Tipp: Zeige zuerst folgende Verallgemeinerung des Satzes von Baire: Sind A_n abgeschlossene Mengen und besitzt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ einen inneren Punkt, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass A_{n_0} einen inneren Punkt besitzt.