Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 21 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 6

21. Zeige:

(a) Die Polynome $P = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k : n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{K}\}$ bilden einen Vektorraum. Es gibt aber keine Norm, die P zu einem Banachraum macht. (1)

Lösung: Der Raum P hat die abzählbare (Hamel) Basis x^k mit $k \in \mathbb{N}_0$. Da Banachräume aber laut Vorlesung keine abzählbare Basis zulassen, kann P mit keiner Norm zum Banachraum werden.

(b) Sei X ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(X)$. Es gebe für alle $x \in X$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $T^n x = 0$. Dann ist T *nilpotent*; es existiert also ein $m \in \mathbb{N}$ mit $T^m = 0$. Die Aussage ist aber im Allgemeinen falsch, wenn X nicht vollständig ist. (3)

Lösung: Betrachte die Mengen $A_n := \{x \in X : T^n x = 0\}$. Weil T^n stetig ist, ist A_n abgeschlossen. Nach Voraussetzung ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Aus dem Satz von Baire folgt, dass es $n_0 \in \mathbb{N}$, $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x,\varepsilon) \subset A_{n_0}$ gibt, also $T^{n_0} y = 0$ für $\|y - x\| < \varepsilon$. Dann ist wegen Linearität auch $T^{n_0} z = T^{n_0}(x + z) - T^{n_0} x = 0$ für $\|z\| < \varepsilon$, denn $y := x + z \in B(x,\varepsilon)$ und $x \in B(x,\varepsilon)$. Schließlich ist daher $T^{n_0} z = 0$ für alle $z \in X$; für $z = 0$ ist dies klar, und für $z \neq 0$ sieht man dies mit $T^{n_0} z = \frac{2\|z\|}{\varepsilon} T^{n_0}(\frac{\varepsilon z}{2\|z\|}) = 0$.
Als Gegenbeispiel für nicht vollständige Räume betrachte $X = c_{00}$ und den Linksshift $T(x_n) := (x_{n+1})$. Dann gibt es für jedes $x \in c_{00}$ ein $n(x) \in \mathbb{N}$ mit $T^{n(x)} x = 0$; man wähle $n(x)$ so groß, dass $x_n = 0$ für alle $n \geq n(x)$ ist. Aber natürlich ist $T^n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

22. Seien X und Y normierte Räume und $T_n, T \in \mathscr{L}(X,Y)$. Wir sagen, dass (T_n) *stark gegen T konvergiert*, falls für jedes $x \in X$ die Folge $(T_n x)$ in Y gegen Tx konvergiert.

(a) Seien X, Y und Z Banachräume, $T_n \in \mathscr{L}(X,Y)$ und $S_n \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Es konvergiere T_n stark gegen $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ und S_n stark gegen $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$. Zeige, dass dann auch $S_n T_n$ stark gegen ST konvergiert! (2)

Lösung: Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit gibt es $M > 0$ mit $\|S_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Nun kann man für $x \in X$ wie folgt abschätzen:

$$\|S_n T_n x - STx\| \leq \|S_n(T_n - T)x\| + \|(S_n - S)Tx\| \leq M\|T_n x - Tx\| + \|(S_n - S)(Tx)\|$$

Der erste Summand konvergiert wegen starker Konvergenz von (T_n) gegen 0, der zweite Summand wegen starker Konvergenz von (S_n), hier angewendet an der Stelle Tx. Also konvergiert $S_n T_n x$ gegen STx, was die starke Konvergenz zeigt.

(b) Sei $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$ konvergiert für jede Folge $y = (y_n) \in c_0$.

(ii) $x \in \ell^1$.

Lösung: Konvergiere die Reihe für jedes $y \in c_0$. Betrachte die Funktionale $\varphi_N(x) := \sum_{n=1}^{N} x_n y_n$ von c_0 nach $\mathbb{R}$. Es ist klar, dass φ_N stetig ist. Nach Voraussetzung konvergiert $\varphi_N(y)$ mit $N \to \infty$ für jedes $y \in c_0$. Laut Vorlesung gibt es also $\varphi \in \mathscr{L}(c_0, \mathbb{R})$ mit $\varphi_N(y) \to \varphi(y)$ für alle $y \in c_0$. Nach Aufgabe 16 gibt es dann $z = (z_n) \in \ell^1$ mit $\varphi(y) = \sum_{n=1}^{\infty} z_n y_n$ für $y \in c_0$. Insbesondere folgt für $y = e_n$, dass $z_n = \varphi(e_n) = \lim_{N\to\infty} \varphi_N(e_n) = x_n$ gelten muss. Also ist $x = z \in \ell^1$ wie behauptet.
Die andere Implikation ist trivial.

23. Seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $A \subset X$ total in X. Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathscr{L}(X,Y)$. Für alle $x \in A$ existiere der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} T_n x$. Zeige, dass dann (T_n) stark gegen ein $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ konvergiert! Zeige, dass die Aussage im Allgemeinen falsch ist, wenn man die Forderung $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$ streicht! (5)

Lösung: Konvergiert $(T_n x)$ für alle $x \in A$, so nach den Rechenregeln für Grenzwerte auch für alle $x \in \operatorname{span} A$. Wir können also annehmen, dass A in X sogar dicht ist.

Wir zeigen, dass $(T_n x)$ sogar für jedes $x \in X$ konvergiert. Da Y vollständig ist, genügt es zu zeigen, dass die Folge eine Cauchy-Folge ist. Definiere $M := \sup \|T_n\| < \infty$. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wähle $a \in A$ mit $\|a - x\| < \frac{\varepsilon}{4M}$. Wegen Konvergenz von $(T_n a)$ gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|T_n a - T_m a\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für $n, m \geq n_0$. Es folgt, dass

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n(x-a)\| + \|T_n a - T_m a\| + \|T_m(x-a)\| \leq 2M\|x-a\| + \|T_n a - T_m a\| < \varepsilon$$

für alle $n, m \geq n_0$ gilt. Also ist $(T_n x)$ eine Cauchy-Folge und daher konvergent. Definiere $Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x$ für $x \in X$. Es ist nur noch zu zeigen, dass T in $\mathscr{L}(X,Y)$ liegt. Dies ist aber der Satz über die starke Konvergenz.

Für ein Gegenbeispiel betrachte $X = c_0$, $A = c_{00}$ und $Y = \mathbb{R}$. Dann ist A dicht und daher insbesondere total in X. Definiere $T_n x := n^2 x_n$. Offenbar ist jedes T_n stetig mit $\|T_n\| \leq n^2$, und für $x \in A$ gilt $\lim_{n\to\infty} T_n x = 0$. Für $x := (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist aber andererseits $T_n x = n$, also $(T_n x)$ nicht konvergent.

24. (a) Sei X ein Vektorraum und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf X, mit denen der Raum jeweils zu einem Banachraum wird. Für ein $c > 0$ gelte $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ für alle $x \in X$. Zeige, dass es dann eine Konstante α mit $\|x\|_2 \leq \alpha\|x\|_1$ für $x \in X$ gibt! (2)

Lösung: Betrachte die Identität I auf X als Abbildung von $(X, \|\cdot\|_1)$ nach $(X, \|\cdot\|_2)$. Nach Voraussetzung ist I ein beschränkter Operator, wobei genauer $\|I\| \leq c$ gilt. Nach dem Satz über die stetige Inverse ist also auch I^{-1} als Operator von $(X, \|\cdot\|_2)$ nach $(X, \|\cdot\|_1)$ beschränkt. Nun kann man $\alpha := \|I^{-1}\|$ wählen.

(b) Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum, und seien O_n abzählbar viele dichte offene Mengen in M. Zeige, dass dann auch $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ in M dicht ist! (6)
Tipp: Zeige zuerst folgende Verallgemeinerung des Satzes von Baire: Sind A_n abgeschlossene Mengen und besitzt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ einen inneren Punkt, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass A_{n_0} einen inneren Punkt besitzt.

Lösung: Wir zeigen eine etwas allgemeinere Variante des Satzes von Baire: Seien A_n abgeschlossen und habe $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ einen inneren Punkt. Dann hat A_{n_0} einen inneren Punkt für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
Seien also die A_n wie beschrieben. Dann gibt es $x_0 \in M$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x_0, 2\varepsilon) \subset \bigcup A_n$. Betrachte $\widetilde{A}_n := A_n \cap X$ mit $X := \overline{B(x_0, \varepsilon)}$. Dann ist X nach Vorlesung wiederum ein vollständiger metrischer Raum, $\widetilde{A}_n \subset X$ abgeschlossen, und es gilt $X = \bigcup \widetilde{A}_n$. Nach dem Satz von Baire gibt es also $n_0 \in \mathbb{N}$, $y_0 \in X$ und $\delta > 0$ mit $B_X(y_0, \delta) \subset \widetilde{A}_{n_0}$ in X, also $B(y_0, \delta) \cap X \subset A_{n_0} \cap X$. Wähle $z_0 \in B(x_0, \varepsilon)$ mit $d(z_0, y_0) < \delta$ und wähle $\varrho < d(z_0, y_0)$ so klein, dass $B(z_0, \varrho)$ noch in $B(x_0, \varepsilon) \cap B(y_0, \delta)$ liegt. Dann ist

$$B(z_0, \varrho) \subset B(x_0, \varepsilon) \cap B(y_0, \delta) \subset X \cap B(y_0, \delta) \subset A_{n_0} \cap X \subset A_{n_0}.$$

Wir haben gezeigt, dass A_{n_0} einen inneren Punkt besitzt, nämlich z_0.
Zurück zur eigentlichen Aufgabe: Definiere $A_n := O_n^C$. Dann ist A_n nach Definition abgeschlossen und es gilt $\bigcup A_n = \left(\bigcap O_n\right)^C$. Angenommen, $\bigcap O_n$ wäre nicht dicht. Dann gibt es also $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \cap \bigcap O_n = \emptyset$, was $B(x, \varepsilon) \subset \bigcup A_n$ bedeutet. Also hat $\bigcup A_n$ einen inneren Punkt und daher nach dem soeben Gezeigten auch ein A_{n_0}. Also gibt es $y \in M$ und $\delta > 0$ mit $B(y, \delta) \subset A_{n_0}$, also $B(y, \delta) \cap O_{n_0} = \emptyset$.

Das zeigt $y \notin \overline{O}_{n_0}$, also dass O_{n_0} im Widerspruch zur Voraussetzung nicht dicht ist. Dies beweist die Behauptung.