Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 8

30. Sei H ein Prähilbertraum. Zeige:

(a) Für $u, v \in H$ gilt genau dann $(u|v) = \|u\|\,\|v\|$, wenn eine der beiden Eigenschaften $v = 0$ oder $u = \lambda v$ mit $\lambda \geq 0$ erfüllt ist. (2)

Tipp: Untersuche im Beweis der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung, wann Gleichheit herrscht.

Lösung: Ist $v = 0$, so ist $(u|v) = 0 = \|u\|\,\|v\|$. Ist $u = \lambda v$ mit $\lambda \geq 0$, so folgt

$$(u|v) = (u|\lambda u) = \lambda \|u\|^2 = \|u\|\,\|\lambda u\| = \|u\|\,\|v\|\,.$$

Sei nun umgekehrt $(u|v) = \|u\|\,\|v\|$. Ist $v = 0$, so ist nichts mehr zu zeigen. Sei also im Folgenden $\|v\| > 0$. Wir setzen $\lambda := \frac{\|u\|}{\|v\|}$; wenn überhaupt ein $\lambda > 0$ die Gleichung $u = \lambda v$ erfüllt, dann dieses. Dann gilt nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}\|u - \lambda v\|^2 &= \|u\|^2 - \lambda\,(u|v) - \lambda\,(v|u) + \lambda^2\,\|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 - 2\frac{\|u\|}{\|v\|}\,\|u\|\,\|v\| + \frac{\|u\|^2}{\|v\|^2}\,\|v\|^2 = 0,\end{aligned}$$

also $u = \lambda v$.

(b) Sind $u \neq v$ aus H, $\|u\| = \|v\| = 1$ und $\alpha \in (0,1)$, so folgt $\|\alpha u + (1-\alpha)v\| < 1$. (2)

Lösung: Wir zeigen zuerst $\operatorname{Re}(u|v) < \|u\|\,\|v\|$. Nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung gilt $\operatorname{Re}(u|v) \leq |(u|v)| \leq \|u\|\,\|v\|$. Wäre nun $\operatorname{Re}(u|v) = \|u\|\,\|v\|$, so wären beide Abschätzungen Gleichheiten, also insbesondere $\operatorname{Re}(u|v) = |(u|v)|$, woraus $(u|v) > 0$ folgt. Also wäre $(u|v) = \|u\|\,\|v\|$. Nach dem letzten Aufgabenteil folgt daraus $v = 0$, was ausgeschlossen ist, oder $u = \lambda v$ mit $\lambda > 0$. Wegen $\|u\| = \|v\| = 1$ muss dann allerdings $\lambda = 1$, also $u = v$ sein, was ebenfalls ausgeschlossen war. Damit ist die behauptete Ungleichung bewiesen.

Für $\alpha \in (0,1)$ ist natürlich $\alpha(1-\alpha) > 0$. Mit obiger Überlegung folgt daraus

$$\begin{aligned}\|\alpha u + (1-\alpha)v\|^2 &= \alpha^2\,\|u\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{Re}(u|v) + (1-\alpha)^2\,\|v\|^2 \\ &< \alpha^2\,\|u\|^2 + 2\alpha(1-\alpha)\,\|u\|\,\|v\| + (1-\alpha)^2\,\|v\|^2 \\ &= \big(\alpha\,\|u\| + (1-\alpha)\,\|v\|\big)^2 = 1.\end{aligned}$$

Die Behauptung ist damit gezeigt.

Bemerkung: Man kann sich die Aussage auch geometrisch klarmachen. Es genügt, die Aussage im Raum $H_0 := \operatorname{span}\{u, v\} \cong \mathbb{K}^2$ zu zeigen. Nach einer unitären Transformation kann man $u = e_1$ und $v \in \mathbb{R}^2$ annehmen. Für diese Situation ist die Aussage allerdings offensichtlich.

31. (a) Berechne die Fourierreihe der Funktion $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$, $f(x) := |x - \pi|$ für $x \in [0, 2\pi]$! (2)

Lösung: Für $k = 0$ ist

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{2\pi\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Für $k \neq 0$ ist $G(x) = \frac{i}{k} x \,\mathrm{e}^{-ikx} + \frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{-ikx}$ eine Stammfunktion von $g(x) = x \,\mathrm{e}^{-ikx}$. Es ist $G(-\pi) = \frac{-\pi i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2}$, $G(0) = \frac{1}{k^2}$ und $G(\pi) = \frac{\pi i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k}{k^2}$. Damit ist für $k \neq 0$

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \,\mathrm{e}^{-ikx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \Big(\int_0^{\pi} (\pi - x) \,\mathrm{e}^{-ikx} \,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (x - \pi) \,\mathrm{e}^{-ikx} \,\mathrm{d}x \Big) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(- \int_{-\pi}^{0} y \,\mathrm{e}^{-iky} \,\mathrm{e}^{-ik\pi} \,\mathrm{d}y + \int_0^{\pi} y \,\mathrm{e}^{-iky} \,\mathrm{e}^{-ik\pi} \,\mathrm{d}y \Big) \\
&= \frac{(-1)^k}{2\pi} \Big(G(-\pi) - 2G(0) + G(\pi) \Big) = \frac{1}{2\pi} \Big(\frac{-\pi i}{k} + \frac{1}{k^2} + \frac{\pi i}{k} + \frac{1}{k^2} \Big) - \frac{(-1)^k}{\pi k^2} \\
&= \frac{1}{\pi k^2} - \frac{(-1)^k}{\pi k^2}.
\end{aligned}$$

Daher ist $c_k = 0$ für gerade $k \neq 0$ und $c_k = \frac{2}{\pi k^2}$ für ungerade k. Die Fourierreihe ist also

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2}{\pi (2k+1)^2} \,\mathrm{e}^{i(2k+1)x} .$$

(b) Zeige folgende Identität: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$ (1)

Tipp: Man kann die Parseval'sche Gleichung nutzen.

Lösung: Sei f und c_k wie im ersten Aufgabenteil. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(y+\pi)|^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{\pi^2}{3}$$

und nach der Parseval'schen Gleichung also

$$\frac{\pi^2}{3} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} |c_{2k+1}|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}.$$

Löst man nach der Reihe auf, ergibt sich die gesuchte Identität.

(c) Folgere hieraus: $\zeta(4) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$ (2)

Lösung: Durch Zerlegen in gerade und ungerade Summanden ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} + \frac{\pi^4}{96}.$$

Löst man wiederum auf, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}.$$

32. (a) Sei H ein Prähilbertraum, X ein Vektorraum und $U \colon H \to X$ linear und bijektiv. Zeige, dass dann $(x|y)_X := \big(U^{-1}x \big| U^{-1}y\big)_H$ ein Skalarprodukt auf X definiert und dass bezüglich dieses Skalarprodukts U ein unitärer Isomorphismus von H nach X ist! (3)

Lösung: Weil U^{-1} linear ist, ist $(\cdot|\cdot)_X$ eine positive, symmetrische Sesquilinearform. Ist $(x|x)_X = 0$, so bedeutet dies gerade $\|U^{-1}x\|_H^2 = 0$, also $U^{-1}x = 0$ und damit $x = 0$. Dies zeigt, dass $(\cdot|\cdot)_X$ ein Skalarprodukt ist.

Nach Voraussetzung ist U bijektiv und nach Definition gilt $(Ux|Uy)_X = (x|y)_H$ für alle $x, y \in H$, was zeigt, dass U ein unitärer Isomorphismus ist.

(b) Sei $w = (w_n)$ eine reelle Folge mit $w_n \in (0, \infty)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$\ell_w^2 := \Big\{ (x_n) : x_n \in \mathbb{C} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} w_n |x_n|^2 < \infty \Big\}$$

und $(x|y)_w := \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n \overline{y}_n$. Zeige, dass ℓ_w^2 mittels $(\cdot|\cdot)_w$ zu einem separablen Hilbertraum wird, und gib einen unitären Operator $U \colon \ell^2 \to \ell_w^2$ an! (4)

Tipp: Findet man zuerst ein passendes U, so kann man darauf den ersten Aufgabenteil anwenden, statt alle Eigenschaften von ℓ_w^2 direkt nachzurechnen.

Lösung: Zuerst beobachtet man, dass $x = (x_n)$ nach Definition genau dann in ℓ^2 liegt, wenn die Folge $Ux := (\frac{x_n}{\sqrt{w_n}})$ in ℓ_w^2 liegt. Hierbei kann man U zuerst einmal als eine Abbildung auf dem Raum aller $\mathbb{K}$-wertigen Folgen verstehen. Weil U linear ist, zeigt diese Überlegung bereits, dass $\ell_w^2 = U(\ell^2)$ ein Vektorraum ist und $U \colon \ell^2 \to \ell_w^2$ eine Bijektion. Nach dem ersten Aufgabenteil ist also

$$\big(U^{-1}x \big| U^{-1}y\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{w_n} x_n \overline{\sqrt{w_n} y_n} = \sum_{n=1}^{\infty} w_n x_n \overline{y}_n = (x|y)_w$$

für $x, y \in \ell_w^2$ ein Skalarprodukt auf ℓ_w^2 und $U \colon \ell^2 \to \ell_w^2$ unitärer Isomorphismus. Nach Aufgabe 18 folgt daraus insbesondere, dass ℓ_w^2 vollständig und separabel ist.

33. Es sei $(\ell^2, \|\cdot\|_2)$ wie üblich definiert, also $\|x\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$. Sei $\|\cdot\|$ eine weitere Norm auf ℓ^2 mit den Eigenschaften, dass $(\ell^2, \|\cdot\|)$ ein Banachraum ist und dass die Zuordnung $\varphi_m \colon \ell^2 \to \mathbb{K}, x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto x_m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|$ ist. Zeige, dass die Normen $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|$ dann bereits äquivalent sind! (4)

Tipp: Man kann den Satz über den abgeschlossenen Graphen anwenden.

Lösung: Wir zeigen, dass die Identität $I \colon (\ell^2, \|\cdot\|_2) \to (\ell^2, \|\cdot\|)$ einen abgeschlossenen Graphen hat. Sei also (x^n) eine Folge in ℓ^2 mit der Eigenschaft, dass (x^n) bezüglich $\|\cdot\|_2$ gegen ein $x \in \ell^2$ konvergiert und (y^n) mit $y^n := Ix^n = x^n$ bezüglich $\|\cdot\|$ gegen ein $y \in \ell^2$. Wir müssen nur zeigen, dass $y = Ix = x$ gilt. Dies folgt aber aus der Stetigkeit von φ_m bezüglich beider Normen, da $y_m \leftarrow \varphi_m(y^n) = \varphi_m(x^n) \to x_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist I stetig. Es gibt also $c > 0$ mit der Eigenschaft, dass $\|x\| \le c\|x\|_2$ für alle $x \in \ell^2$ gilt. Laut Aufgabe 24 sind die beiden Normen dann aber bereits äquivalent.

Bonusaufgabe: (5 Punkte)

Seien H_1 und H_2 reelle Prähilberträume und $\varphi \colon H_1 \to H_2$ eine (möglicherweise nicht-lineare) isometrische Abbildung, also $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ für $x, y \in H_1$. Zeige, dass es dann $z \in H_2$ und einen isometrischen linearen Operator $U \colon H_1 \to H_2$ mit $\varphi(x) = z + Ux$ für $x \in H_1$ gibt!

Tipp: Definiere $z := \varphi(0)$ und $\psi(x) := \varphi(x) - z$. Zeige $(x|y) = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2)$ und schlussfolgere daraus $(\psi(x)|\psi(y)) = (x|y)$. Benutze dies, um zu zeigen, dass ψ linear ist.

Lösung: Sei ψ wie im Tipp. Offenbar gilt $\|\psi(x) - \psi(y)\| = \|x - y\|$ und $\psi(0) = 0$. Also folgt für $y = 0$ insbesondere auch $\|\psi(x)\| = \|x\|$. Es genügt nun, die Linearität von ψ zu zeigen. Die angegebene Gleichung für das Skalarprodukt rechnet man leicht nach. Aus den bereits angestellten Überlegungen ergibt sich dann

$$(\psi(x)|\psi(y)) = \frac{1}{2}\big(\|\psi(x)\|^2 + \|\psi(y)\|^2 - \|\psi(x) - \psi(y)\|^2\big) = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2\big) = (x|y)\,.$$

Ist nun aber $x, y \in H_1$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so folgt

$$\|\psi(\lambda x + y) - \lambda\psi(x) - \psi(y)\|^2 = \cdots = \|(\lambda x + y) - \lambda x - y\|^2 = 0,$$

wobei man die hier abgekürzte Gleichheit sieht, indem man die Normen als Summe von Skalarprodukten ausdrückt, bei denen man ψ wie eben gezeigt "weglassen" kann. Aus dieser Rechnung folgt dann $\psi(\lambda x + y) = \lambda\psi(x) + \psi(y)$, also die Linearität von ψ.