Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 23 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 9

34. Sei H ein Prähilbertraum, $C \subset H$ vollständig und konvex, $C \neq \emptyset$ und P_C die orthogonale Projektion von H auf C. Zeige, dass dann $P_C(P_C(x)) = P_C(x)$ und

$$\|P_C(x) - P_C(y)\| \leq \|x - y\|$$

für alle $x, y \in H$ gilt! Schlussfolgere, dass P_C stetig ist! (3)
Tipp: Laut Vorlesung gilt für alle $z \in C$ die Abschätzung $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|z - P_C(x)) \leq 0$ und eine analoge Ungleichung für y. Setze für z geeignete Werte ein, um $\|P_C(x) - P_C(y)\|^2$ abzuschätzen.

35. Sei H ein Hilbertraum und $M \subset H$. Zeige:

(a) $\left(M^\perp\right)^\perp = \overline{\operatorname{span} M}$. (3)

(b) Ist $X \subset H$ und $X^\perp = M^\perp$, so ist $X \subset \overline{\operatorname{span} X} = \overline{\operatorname{span} M}$. (1)

(c) M ist genau dann total, wenn $M^\perp = \{0\}$ gilt. (1)

(d) Ein Orthonormalsystem (e_n) ist genau dann eine Orthonormalbasis von H, wenn $\{x \in H : (x|e_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}\} = \{0\}$ gilt. (1)

36. Sei E ein normierter Raum, $A, B \subset E$. Zeige:

(a) Sind A und B konvex, so sind auch $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ und für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $\alpha A := \{\alpha a : a \in A\}$ konvex. (2)

(b) Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ auch αB kompakt und $A + B$ und αA abgeschlossen. (2)

37. Zeige:

(a) Ist $(C_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Familie konvexer Teilmengen eines Vektorraums V, so ist auch $\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha$ konvex. (1)

(b) Sei V ein Vektorraum und $C \subset V$ konvex. Seien $n \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, $m_k \in C$. Dann gilt $\sum_{k=1}^n \lambda_k m_k \in C$. (2)
Tipp: Induktion über $n \in \mathbb{N}$.

(c) Sei V ein Vektorraum und $M \subset V$. Dann ist (3)

$$\operatorname{co}(M) = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k m_k : \lambda_k \geq 0, \sum_{k=1}^n \lambda_k = 1, m_k \in M, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(d) Ist X ein normierter Raum und $M \subset X$ eine endliche Menge, so ist die konvexe Hülle $\operatorname{co}(M)$ kompakt. (2)

(e) Sei H ein separabler reeller Hilbertraum, $C \subset H$ konvex, $C \neq \emptyset$ und $x \in H \setminus C$. Es gibt im Allgemeinen *kein* $p \in H$, $p \neq 0$ mit $(p|y) \leq (p|x)$ für alle $y \in C$. (2)
Tipp: Man kann C als einen dichten Unterraum von X wählen.