Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

Für die Berechnung der über das Semester zu erreichenden Gesamtpunktzahl wird dieses Blatt nur mit 20 Punkten berücksichtigt. Mit den übrigen Aufgaben kann man sich also Bonuspunkte verdienen.

38. Sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ eine lineare Abbildung. Zeige:

(a) Gilt $(Ax|y) = (x|Ay)$ für alle $x, y \in H$, so ist A stetig. (2)
Tipp: Verwende den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

(b) Sind A und B in $\mathscr{L}(H)$, so ist $(AB)^* = B^*A^*$. (1)

(c) Die Abbildung A ist genau dann invertierbar, wenn A^* invertierbar ist. In diesem Fall gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (2)

(d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und A stetig, so gilt $\sigma(A) = \operatorname{conj}(\sigma(A^*))$, wobei $\operatorname{conj}(C) = \{\overline{z} : z \in C\}$. (1)

(e) Für den Linksshift $Lx = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf ℓ^2 gilt $\sigma_p(L) \neq \operatorname{conj}(\sigma_p(L^*))$. (2)
Hinweis: Wie in der Vorlesung bezeichnet $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x\}$ die Menge der Eigenwerte von A.

(f) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A ein stetiger Operator und $W(A) := \{(Ax|x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}$, so ist A selbstadjungiert. (2)
Tipp: Zeige $(Az|z) = (z|Az)$ für $z \in H$ und wähle $z = x + y$ und $z = x + iy$.

(g) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A stetig und $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in H$, so folgt $A = 0$. (2)
Tipp: Verwende die Polarisationsgleichung.

39. Sei H ein Hilbertraum und $P\colon H \to H$ ein linearer Operator mit der Eigenschaft $P^2 = P$. Sei $U := \operatorname{Rg} P$. Zeige:

(a) Ist P stetig und gilt $(x - Px|Py) = 0$ für alle $x, y \in H$, so ist U abgeschlossen und P die orthogonale Projektion auf U. (2)

(b) Gilt $(Px|y) = (x|Py)$ für alle $x, y \in H$, so ist U abgeschlossen und $P = P_U$ die orthogonale Projektion auf U. (3)

(c) Ist P stetig mit Operatornorm $\|P\| \leq 1$, so ist U abgeschlossen und $P = P_U$ die orthogonale Projektion auf U. (3)
Tipp: Benutze die Identität $\lambda Py = P(x - Px + \lambda Py)$ und betrachte zuletzt den Grenzwert $\lambda \to \pm\infty$.

40. Zu $m = (m_n) \in \ell^\infty$ sei $A_m\colon \ell^2 \to \ell^2$ der durch $Ax = (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegebene *Multiplikationsoperator*. Man kann wie in Aufgabe 15 zeigen, dass A wohldefiniert und stetig ist und dass $\|A\| = \|m\|_\infty$ gilt. Sei $M := \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeige:

(a) $\sigma_p(A_m) = M$. (2)

(b) $\sigma(A_m) = \overline{M}$. (2)

(c) $A_m^* = A_{\overline{m}}$ mit $\overline{m} := (\overline{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1)

(d) A_m ist genau dann selbstadjungiert, wenn m eine reelle Folge ist. (1)

41. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sigma(A)$ für jeden Operator $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ eine kompakte Menge ist und für selbstadjungiertes A sogar $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ gilt. Zeige die Umkehrung: Ist $K \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere kompakte Menge, so gibt es einen stetigen linearen Operator $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ mit $\sigma(A) = K$. Ist $K \subset \mathbb{R}$, so kann man A sogar selbstadjungiert wählen. (4)

42. Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$. Zeige, dass folgendes gilt:

(a) $\operatorname{Kern} A = (\operatorname{Rg} A^*)^\perp$ und $\operatorname{Kern} A^* = (\operatorname{Rg} A)^\perp$. (2)

(b) $\overline{\operatorname{Rg} A} = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$ und $\overline{\operatorname{Rg} A^*} = (\operatorname{Kern} A)^\perp$. (2)

43. Zeige:

(a) Sei $X = \mathbb{K}^N$ und seien $P, Q \in \mathscr{L}(X)$ Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$. Zeige, dass dann $\dim(\operatorname{Rg} P) = \dim(\operatorname{Rg} Q)$ gilt! (4)
Tipp: Argumentiere, dass es im Fall $\dim(\operatorname{Rg} P) > \dim(\operatorname{Rg} Q)$ einen Vektor $x \neq 0$ in $\operatorname{Rg} P \cap \operatorname{Kern} Q$ gibt und schlussfolgere, dass dann $\|P - Q\| \geq 1$ gilt.

(b) Bleibt die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für beliebige Banachräume richtig? Falls nein: Gilt sie in unendlich-dimensionalen Hilberträumen? (2)

Das Institut für Angewandte Analysis wünscht allen Teilnehmern der Veranstaltung Funktionalanalysis fröhliche Weihnachten und ein gutes neues Jahr!