UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 40 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10

38. Sei H ein Hilbertraum und $A\colon H \to H$ eine lineare Abbildung. Zeige:

(a) Gilt $(Ax|y) = (x|Ay)$ für alle $x, y \in H$, so ist A stetig. (2)
Tipp: Verwende den Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Lösung: Sei (x_n) eine Folge in H mit $x_n \to x$ und $Ax_n \to y$. Aus der Stetigkeit des Skalarprodukts folgt

$$(y|z) \leftarrow (Ax_n|z) = (x_n|Az) \to (x|Az) = (Ax|z)$$

für alle $z \in H$, also $(Ax - y|z) = 0$. Speziell für $z = Ax - y$ zeigt dies $\|Ax - y\|^2 = 0$, also $Ax = y$. Damit ist nachgerechnet, dass der Operator A abgeschlossen ist. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist A stetig.

(b) Sind A und B in $\mathscr{L}(H)$, so ist $(AB)^* = B^*A^*$. (1)

Lösung: Für alle $x, y \in H$ gilt

$$(x|(AB)^*y) = (ABx|y) = (Bx|A^*y) = (x|B^*A^*y)\,.$$

Mit dem üblichen Argument zeigt dies $(AB)^*y = B^*A^*y$ für jedes $y \in H$, also $(AB)^* = B^*A^*$.

(c) Die Abbildung A ist genau dann invertierbar, wenn A^* invertierbar ist. In diesem Fall gilt $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. (2)

Lösung: Sei A invertierbar. Offenbar ist $I^* = I$. Mit dem letzten Aufgabenteil zeigt dies

$$(A^{-1})^*A^* = (AA^{-1})^* = I^* = I \text{ und } A^*(A^{-1})^* = (A^{-1}A)^* = I^* = I.$$

Also ist $(A^{-1})^* \in \mathscr{L}(H)$ die Umkehrfunktion von A^*, was nach Definition bedeutet, dass A^* invertierbar ist mit $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.
Sei nun A^* invertierbar. Dann ist nach dem eben Gezeigten auch $(A^*)^* = A$ invertierbar.

(d) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und A stetig, so gilt $\sigma(A) = \operatorname{conj}(\sigma(A^*))$, wobei $\operatorname{conj}(C) = \{\overline{z} : z \in C\}$. (1)

Lösung: Nach Definition liegt $\lambda \in \mathbb{C}$ genau dann in $\varrho(A)$, wenn $\lambda I - A$ invertierbar ist. Dies ist nach dem letzten Aufgabenteil genau dann der Fall, wenn die Adjungierte $(\lambda I - A)^* = \overline{\lambda} I - A^*$ invertierbar ist, also wenn $\overline{\lambda}$ in $\varrho(A^*)$ liegt. Hier wurden die Rechenregeln $(A + B)^* = A^* + B^*$ und $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ verwendet. Umgekehrt ist also $\lambda \in \sigma(A)$ äquivalent zu $\overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$. Dies war die Behauptung.

(e) Für den Linksshift $Lx = (x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ auf ℓ^2 gilt $\sigma_p(L) \neq \operatorname{conj}(\sigma_p(L^*))$. (2)
Hinweis: Wie in der Vorlesung bezeichnet $\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} | \exists x \neq 0 : Ax = \lambda x\}$ die Menge der Eigenwerte von A.

Lösung: Für alle x und y aus ℓ^2 gilt mit dem Rechtsshift $R \in \mathscr{L}(\ell^2)$, der durch $Rx := (0, x_1, x_2, \dots)$ definiert ist,

$$(Lx|y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}\overline{y}_n = \sum_{n=2}^{\infty} x_n \overline{y}_{n-1} = (x|Ry)\,.$$

Also ist $L^* = R$. Es ist leicht zu sehen, dass R injektiv ist, also 0 nicht in $\sigma_p(R)$ liegt. Zudem ist $Le_1 = 0$, also $0 \in \sigma_p(L)$. Folglich ist $\sigma_p(L) \neq \operatorname{conj}(\sigma_p(R))$.

(f) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A ein stetiger Operator und $W(A) := \{(Ax|x) : \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}$, so ist A selbstadjungiert. (2)
Tipp: Zeige $(Az|z) = (z|Az)$ für $z \in H$ und wähle $z = x + y$ und $z = x + iy$.

Lösung: Für $u \in H$ mit $\|u\| = 1$ ist nach Voraussetzung $(Au|u) \in \mathbb{R}$. Für beliebiges $z \in H$ mit $z \neq 0$ folgt mit $\alpha := \|z\|$ und $u := \frac{z}{\alpha}$, dass $z = \alpha u$ gilt. Daher ist $(Az|z) = \alpha^2 (Au|u) \in \mathbb{R}$. Für $z = 0$ ist ebenfalls $(Az|z) \in \mathbb{R}$. Insgesamt folgt für beliebiges $z \in H$ aus dieser Überlegung $(Az|z) = \overline{(z|Az)} = (z|Az)$.

Man kann nachrechnen, dass die komplexe Polarisationsgleichung auch für nichtsymmetrische Formen richtig bleibt. Das zeigt, dass auf einem komplexen Prähilbertraum eine Sesquilinearform durch ihre Werte auf der Diagonalen eindeutig bestimmt ist. Da die Formen $a(x, y) = (Ax|y)$ und $b(x, y) = (x|Ay)$ wie soeben gezeigt für $x = y$ übereinstimmen, folgt also $a = b$, also $(Ax|y) = (x|Ay)$ für alle $x, y \in H$. Also ist A selbstadjungiert und die Aussage bewiesen.

Die im Tipp angedeutete Lösung verfährt direkter: Setzt man nun für vorgegebenes x und y aus H den Wert $z = x + y$ in $(Az|z) = (z|Az)$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}(Ax|x) + (Ax|y) + (Ay|x) + (Ay|y) &= (A(x + y)|x + y) = (x + y|A(x + y)) \\ &= (x|Ax) + (x|Ay) + (y|Ax) + (y|Ay)\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt $(Ax|y) + (Ay|x) = (x|Ay) + (y|Ax)$. Analog ergibt sich für $z = x + iy$

$$\begin{aligned}(Ax|x) - i\,(Ax|y) + i\,(Ay|x) + (Ay|y) &= (A(x + iy)|x + iy) = (x + iy|A(x + iy)) \\ &= (x|Ax) - i\,(x|Ay) + i\,(y|Ax) + (y|Ay)\,.\end{aligned}$$

Dies zeigt $(Ax|y) - (Ay|x) = (x|Ay) - (y|Ax)$. Addiert man die beiden vereinfachten Gleichungen, erhält man $2\,(Ax|y) = 2\,(x|Ay)$. Weil x und y beliebig war, ist $A^* = A$ bewiesen.

(g) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, A stetig und $(Ax|x) = 0$ für alle $x \in H$, so folgt $A = 0$. (2)
Tipp: Verwende die Polarisationsgleichung.

Lösung: Aus dem letzten Aufgabenteil folgt $A^* = A$. Definiere $a(x, y) := (Ax|y)$. Offenbar ist a eine Sesquilinearform. Wegen

$$a(y, x) = (Ay|x) = (y|Ax) = \overline{(Ax|y)} = \overline{a(x, y)}.$$

ist a symmetrisch. Die Sesquilinearform $b(x, y) := 0$ ist ebenfalls symmetrisch, und es gilt $a(x, x) = b(x, x)$ für alle $x \in H$. Aufgabe 25(b) zeigt $a(x, y) = b(x, y) = 0$ für alle $x, y \in H$. Insbesondere ist $a(x, Ax) = \|Ax\|^2 = 0$ und damit $Ax = 0$ für alle $x \in H$. Dies zeigt $A = 0$.

39. Sei H ein Hilbertraum und $P\colon H \to H$ ein linearer Operator mit der Eigenschaft $P^2 = P$. Sei $U := \operatorname{Rg} P$. Zeige:

(a) Ist P stetig und gilt $(x - Px|Py) = 0$ für alle $x, y \in H$, so ist U abgeschlossen und P die orthogonale Projektion auf U. (2)

Lösung: Ist P stetig, so ist $U = \operatorname{Kern}(I - P)$ abgeschlossen. Ist $x \in H$ und $z \in U$, so ist nach Voraussetzung $Px \in U$ und

$$\operatorname{Re}(x - Px|z - Px) = \operatorname{Re}(x - Px|P(z - x)) = 0 \leq 0,$$

also nach der Charakterisierung aus der Vorlesung Px das Proximum von x in U. Daher ist P die orthogonale Projektion auf U.

(b) Gilt $(Px|y) = (x|Py)$ für alle $x, y \in H$, so ist U abgeschlossen und $P = P_U$ die orthogonale Projektion auf U. (3)

Lösung: Nach Aufgabenteil 38 (a) ist P stetig. Aus der Voraussetzung folgt

$$(x - Px|Py) = (P(x - Px)|y) = \big((P - P^2)x\big|y\big) = 0$$

für alle $x, y \in H$. Aus dem ersten Aufgabenteil folgt nun die Behauptung.

(c) Ist P stetig mit Operatornorm $\|P\| \le 1$, so ist U abgeschlossen und $P = P_U$ die orthogonale Projektion auf U. (3)
Tipp: Benutze die Identität $\lambda Py = P(x - Px + \lambda Py)$ und betrachte zuletzt den Grenzwert $\lambda \to \pm\infty$.

Lösung: Seien $x, y \in H$. Aus der Identität im Tipp ergibt sich

$$\|\lambda Py\|^2 \le \|x - Px + \lambda Py\|^2 = \|x - Px\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(x - Px|\lambda Py) + \|\lambda Py\|^2.$$

Für $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt also $-2\lambda\,\mathrm{Re}\,(x - Px|Py) \le \|x - Px\|^2$. Dies ist nur für den Fall $\mathrm{Re}\,(x - Px|Py) = 0$ möglich, wie der Grenzübergang $\lambda \to \pm\infty$ zeigt. Weil dies für jedes $y \in H$ richtig ist, ergibt sich auch $\mathrm{Re}\,(x - Px|iPy) = \mathrm{Im}\,(x - Px|Py) = 0$. Ingesamt ist also $(x - Px|Py) = 0$ für alle $x, y \in H$ gezeigt, woraus nach dem ersten Aufgabenteil die Behauptung folgt.

40. Zu $m = (m_n) \in \ell^\infty$ sei $A_m\colon \ell^2 \to \ell^2$ der durch $Ax = (m_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegebene *Multiplikationsoperator*. Man kann wie in Aufgabe 15 zeigen, dass A wohldefiniert und stetig ist und dass $\|A\| = \|m\|_\infty$ gilt. Sei $M := \{m_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zeige:

(a) $\sigma_p(A_m) = M$. (2)

Lösung: Ist $\lambda \in M$, also $\lambda = m_{n_0}$, so gilt $Ae_{n_0} = m_{n_0}e_{n_0} = \lambda e_{n_0}$. Damit ist λ ein Eigenwert, also $M \subset \sigma_p(A_m)$.
Sei nun umgekehrt $\lambda \in \sigma_p(A_m)$ mit einem Eigenvektor $x \in \ell^2$, $x \ne 0$, also $A_m x = \lambda x$. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ ein Index mit $x_{n_0} \ne 0$. Dann gilt insbesondere

$$m_{n_0}x_{n_0} = (A_m x)_{n_0} = (\lambda x)_{n_0} = \lambda x_{n_0}.$$

Hieraus folgt $\lambda = m_{n_0} \in M$. Also ist $\sigma_p(A_m) \subset M$.

(b) $\sigma(A_m) = \overline{M}$. (2)

Lösung: Wegen $M = \sigma_p(A_m) \subset \sigma(A_m)$ ergibt sich aus der Abgeschlossenheit von $\sigma(A_m)$ die Inklusion $\overline{M} \subset \sigma(A_m)$.
Sei nun $\lambda \notin \overline{M}$. Dann ist $\varrho := \mathrm{dist}(\lambda, \overline{M}) > 0$. Daher liegt die Folge $\widetilde{m}$ definiert durch $\widetilde{m}_n := \frac{1}{\lambda - m_n}$ in ℓ^∞; genauer ist $\|\widetilde{m}\|_\infty = \frac{1}{\varrho}$. Also ist $B := A_{\widetilde{m}}$ ein Operator in $\mathscr{L}(\ell^2)$. Es ist leicht zu sehen, dass $B(\lambda - A_m) = (\lambda - A_m)B = I$ gilt. Also ist $\lambda - A_m$ invertierbar, was $\lambda \notin \sigma(A_m)$ bedeutet. Dies zeigt $\sigma(A_m) \subset \overline{M}$.

(c) $A_m^* = A_{\overline{m}}$ mit $\overline{m} := (\overline{m}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. (1)

Lösung: Seien $x, y \in \ell^2$. Dann ist

$$(A_m x|y) = \sum_{n=1}^\infty m_n x_n \overline{y}_n = \sum_{n=1}^\infty x_n \overline{(\overline{m}_n y_n)} = (x|A_{\overline{m}}y)\,.$$

(d) A_m ist genau dann selbstadjungiert, wenn m eine reelle Folge ist. (1)

Lösung: Ist m reell, so ist $\overline{m} = m$ und daher $A_m^* = A_{\overline{m}} = A_m$. Ist umgekehrt m nicht reell, also $m_{n_0} \notin \mathbb{R}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so ist $A_m^* e_{n_0} = \overline{m}_{n_0}e_{n_0} \ne m_{n_0}e_{n_0} = A_m e_{n_0}$, also $A_m^* \ne A_m$.

41. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\sigma(A)$ für jeden Operator $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ eine kompakte Menge ist und für selbstadjungiertes A sogar $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ gilt. Zeige die Umkehrung: Ist

$K \subset \mathbb{C}$ eine nicht-leere kompakte Menge, so gibt es einen stetigen linearen Operator $A\colon \ell^2 \to \ell^2$ mit $\sigma(A) = K$. Ist $K \subset \mathbb{R}$, so kann man A sogar selbstadjungiert wählen. (4)

Lösung: Sei $K \subset \mathbb{C}$ vorgegeben. Wähle eine höchstens abzählbare, dichte Teilmenge M von K. Dazu kann man beispielsweise so vorgehen, dass man zu den Überdeckungen $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, \frac{1}{n})$ jeweils eine endliche Teilüberdeckung mit Kugeln $B(x_{nk}, \frac{1}{n})$ wählt. Offenbar ist dann $M := \{x_{nk}\} \subset K$ höchstens abzählbar. Zu $y \in K$ und $\varepsilon > 0$ kann man nun $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$ wählen und dann eine Kugel mit $x_{nk} \in M$, $y \in B(x_{nk}, \frac{1}{n})$. Dann ist $x_{nk} \in B(y, \varepsilon)$. Dies zeigt $\overline{M} = K$.

Sei nun $m := (m_n) \in \ell^\infty$ eine Abzählung von M, bei der Elemente auch mehrfach auftreten dürfen. Nach der vorigen Aufgabe ist $\sigma(A_m) = \overline{M} = K$. Ist sogar $K \subset \mathbb{R}$, so ist m eine reelle Folge und A_m nach dem oben gezeigten selbstadjungiert. Also leistet A_m das Gewünschte.

42. Sei H ein Hilbertraum und $A \in \mathscr{L}(H)$. Zeige:

(a) $\operatorname{Kern} A = (\operatorname{Rg} A^*)^\perp$ und $\operatorname{Kern} A^* = (\operatorname{Rg} A)^\perp$. (2)

Lösung: Sei $x \in \operatorname{Kern} A$. Für $y \in \operatorname{Rg} A^*$ gibt es $v \in H$ mit $y = A^*v$. Es folgt $(x|y) = (x|A^*v) = (Ax|v) = 0$. Also ist $x \in (\operatorname{Rg} A^*)^\perp$.
Sei nun umgekehrt $x \in (\operatorname{Rg} A^*)^\perp$. Dann gilt $(Ax|y) = (x|A^*y) = 0$ für jedes $y \in H$. Speziell für $y = Ax$ folgt daraus $Ax = 0$, also $x \in \operatorname{Kern} A$.
Die zweite Identität folgt aus der ersten, indem man für A den Operator A^* einsetzt und $(A^*)^* = A$ verwendet.

(b) $\overline{\operatorname{Rg} A} = (\operatorname{Kern} A^*)^\perp$ und $\overline{\operatorname{Rg} A^*} = (\operatorname{Kern} A)^\perp$. (2)

Lösung: Nach dem ersten Aufgabenteil und mit Aufgabe 35 (a) ergibt sich

$$(\operatorname{Kern} A^*)^\perp = \big((\operatorname{Rg} A)^\perp\big)^\perp = \overline{\operatorname{Rg} A}.$$

Die zweite Identität folgt aus der ersten, indem man für A den Operator A^* einsetzt und $(A^*)^* = A$ verwendet.

43. Zeige:

(a) Sei $X = \mathbb{K}^N$ und seien $P, Q \in \mathscr{L}(X)$ Projektionen mit $\|P - Q\| < 1$. Zeige, dass dann $\dim(\operatorname{Rg} P) = \dim(\operatorname{Rg} Q)$ gilt! (4)
Tipp: Argumentiere, dass es im Fall $\dim(\operatorname{Rg} P) > \dim(\operatorname{Rg} Q)$ einen Vektor $x \neq 0$ in $\operatorname{Rg} P \cap \operatorname{Kern} Q$ gibt und schlussfolgere, dass dann $\|P - Q\| \geq 1$ gilt.

Lösung: Sei $\dim(\operatorname{Rg} P) \neq \dim(\operatorname{Rg} Q)$. Weil die Aussage in P und Q symmetrisch ist, dürfen wir $\dim(\operatorname{Rg} P) > \dim(\operatorname{Rg} Q)$ annehmen. Nach der Dimensionsformel ist $\dim(\operatorname{Rg} Q) = N - \dim(\operatorname{Kern} Q)$, also $\dim(\operatorname{Rg} P) + \dim(\operatorname{Kern} Q) > N$. Also kann die Summe $\operatorname{Rg} P + \operatorname{Kern} Q \subset \mathbb{K}^N$ nicht direkt sein, da sonst

$$\dim(\operatorname{Rg} P \oplus \operatorname{Kern} Q) = \dim(\operatorname{Rg} P) + \dim(\operatorname{Kern} Q) > N$$

gelten würde. Folglich ist $\operatorname{Rg} P \cap \operatorname{Kern} Q \neq \{0\}$. Es gibt also $x \in \operatorname{Rg} P \cap \operatorname{Kern} Q$ mit $\|x\| = 1$. Nun gilt $\|P - Q\| \geq \|Px - Qx\| = \|x\| = 1$. Damit ist die Behauptung gezeigt.
Der Beweis benutzt übrigens keine besonderen Eigenschaften der Norm, gilt also in allen endlich-dimensionalen normierten Räumen.

(b) Bleibt die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für beliebige Banachräume richtig? Falls nein: Gilt sie in unendlich-dimensionalen Hilberträumen? (2)

Lösung: Sei X ein beliebiger normierter Raum und seien P und Q stetige Projektionen in X mit $\dim(\operatorname{Rg} P) \neq \dim(\operatorname{Rg} Q)$. Betrachte den abgeschlossenen Teilraum

$U := \operatorname{Rg} P + \operatorname{Rg} Q$ und die Einschränkungen $P_0 := P|_U$ und $Q_0 := Q|_U$. Offenbar sind P_0 und Q_0 stetige Projektionen auf U mit $\operatorname{Rg} P = \operatorname{Rg} P_0$, $\operatorname{Rg} Q = \operatorname{Rg} Q_0$ und $\|P_0 - Q_0\| \le \|P - Q\|$. Wenn U endlich-dimensional ist, zeigt der erste Aufgabenteil $\|P_0 - Q_0\| \ge 1$; daraus folgt $\|P - Q\| \ge 1$ und die Behauptung ist gezeigt.

Ist aber U unendlich-dimensional, so ist das Bild einer der beiden Projektionen P_0 oder Q_0 unendlich-dimensional. Nach Umbezeichnung gilt also $\dim(\operatorname{Rg} P_0) = \infty$ und $\dim(\operatorname{Rg} Q_0) < \infty$. Dann ist

$$\operatorname{codim}_U(\operatorname{Rg} P_0) = \dim(U/\operatorname{Rg} P_0) \le \dim(\operatorname{Rg} Q_0) < \infty.$$

Zudem ist wegen $U = \operatorname{Kern} Q_0 \oplus \operatorname{Rg} Q_0$

$$\operatorname{codim}_U(\operatorname{Kern} Q_0) = \dim(U/\operatorname{Kern} Q_0) = \dim(\operatorname{Rg} Q_0) < \infty.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{codim}_U(\operatorname{Rg} P_0 \cap \operatorname{Kern} Q_0) \le \operatorname{codim}_U(\operatorname{Rg} P_0) + \operatorname{codim}_U(\operatorname{Kern} Q_0) < \infty.$$

Dies zeigt $\dim(\operatorname{Rg} P_0 \cap \operatorname{Kern} Q_0) = \infty$, insbesondere $\operatorname{Rg} P_0 \cap \operatorname{Kern} Q_0 \ne \{0\}$. Nun kann man wie im Beweis des ersten Teils ein $x \in \operatorname{Rg} P_0 \cap \operatorname{Kern} Q_0$ mit $\|x\| = 1$ wählen und erhält

$$\|P - Q\| \ge \|P_0 - Q_0\| \ge \|P_0 x - Q_0 x\| = \|x\| = 1.$$

Anhang zur Kodimension: Um den letzten Beweis zu verstehen, benötigt man einige Informationen über die Kodimension $\operatorname{codim}_X(U) := \dim(X/U)$ eines Unterraums U in einem Vektorraum X. Es gilt stets $\dim(U) + \operatorname{codim}_X(U) = \dim(X)$, wobei alle auftretenden Größen auch den Wert ∞ annehmen können. Um dies zu beweisen, betrachtet man eine Basis (u_α) von U und eine Basis $(v_\beta + U)$ von X/U und rechnet nach, dass $(u_\alpha) \cup (v_\beta)$ eine Basis von X ist.

Es wurde außerdem verwendet, dass $U + V = X$ auch $\operatorname{codim}_X(U) \le \dim(V)$ impliziert. Dazu überlegt man sich zuerst, dass für $U \oplus V = X$ wegen $X/U \cong V$ sogar $\operatorname{codim}_X(U) = \dim(V)$ gilt. Im allgemeinen Fall kann man $V = (U \cap V) \oplus W$ schreiben. Dann ist $U \oplus W = X$ und daher $\operatorname{codim}_X(U) = \dim(W) \le \dim(V)$.

Eine weitere Rechenregel ist $\operatorname{codim}_X(U \cap V) \le \operatorname{codim}_X(U) + \operatorname{codim}_X(V)$. Für den Beweis schreibt man $U = (U \cap V) \oplus \tilde{U}$, $V = (U \cap V) \oplus \tilde{V}$ und $X = (U + V) \oplus W$. Dann ist $X = (U \cap V) \oplus \tilde{U} \oplus \tilde{V} \oplus W$. Also ergibt sich

$$\begin{aligned} \operatorname{codim}_X(U \cap V) &= \dim\big((\tilde{U} \oplus \tilde{V}) \oplus W\big) \le \dim(\tilde{V} \oplus W) + \dim(\tilde{U} \oplus W) \\ &= \operatorname{codim}_X(U) + \operatorname{codim}_X(V). \end{aligned}$$

Weitere Rechenregeln für die Kodimension wurden nicht verwendet.