Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

44. Sei E ein Vektorraum und F ein Unterraum von E. Zeige:

(a) Die Menge $E/F := \{x + F : x \in E\}$ wird mit der Komplexsumme und Komplexmultiplikation zu einem Vektorraum, und es gilt $(x + F) + (y + F) = (x + y) + F$ und $\alpha(x + F) = (\alpha x) + F$ für $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$. (2)
Hinweis zur Notation: Hier ist $x + F := \{x + y : y \in F\} \subset E$. Die *Komplexsumme* von $U, V \subset E$ ist $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$. Ebenso definiert man für $\alpha \neq 0$ die Komplexmultiplikation als $\alpha U := \{\alpha u : u \in U\}$. Als Spezialfall setzt man $0 \cdot (x + F) := F$.

(b) Ist E ein normierter Vektorraum und F ein abgeschlossener Unterraum, so wird E/F durch $\|x + F\| := \inf_{y \in x+F} \|y\| = \inf_{f \in F} \|x + f\| = \operatorname{dist}(x, -F) = \operatorname{dist}(x, F)$ zu einem normierten Vektorraum. (2)

(c) Ist E ein Banachraum und F abgeschlossen, so ist E/F vollständig. (2)
Tipp: Man kann hierfür Aufgabe 19 verwenden.

(d) Ist E ein separabler normierter Raum und F abgeschlossen, so ist E/F separabel. (1)

45. Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeige, dass $\ell^p \subset \ell^q$ gilt und es sogar Konstanten c_{pq} mit $\|x\|_q \leq c_{pq}\|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ gibt. (2)