Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 9 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11

44. Sei E ein Vektorraum und F ein Unterraum von E. Zeige:

(a) Die Menge $E/F := \{x + F : x \in E\}$ wird mit der Komplexsumme und Komplexmultiplikation zu einem Vektorraum, und es gilt $(x + F) + (y + F) = (x + y) + F$ und $\alpha(x + F) = (\alpha x) + F$ für $x, y \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$. (2)

Hinweis zur Notation: Hier ist $x + F := \{x + y : y \in F\} \subset E$. Die *Komplexsumme* von $U, V \subset E$ ist $U + V := \{u + v : u \in U, v \in V\}$. Ebenso definiert man für $\alpha \neq 0$ die Komplexmultiplikation als $\alpha U := \{\alpha u : u \in U\}$. Als Spezialfall setzt man $0 \cdot (x + F) := F$.

Lösung: Zuerst zeigen wir $(x + F) + (y + F) \in E/F$. Genauer gilt aber sogar $(x+F)+(y+F) = (x+y)+F$, denn ist $z \in (x+F)+(y+F)$, so gibt es $e, f \in F$ mit $z = (x+e)+(y+f)$. Dann ist $e+f \in F$ und daher $z = (x+y)+(e+f) \in (x+y)+F$. Umgekehrt folgt aus $z \in (x+y)+F$ die Existenz von $f \in F$ mit $z = (x+y)+f$, also $z = (x+0)+(y+f) \in (x+F)+(y+F)$. Also ist die Komplexaddition eine innere Verknüpfung in E/F. Assoziativität und Kommutativität der Addition übertragen sich. Man prüft leicht nach, dass $F = 0 + F$ das neutrale Element und $-x + F$ das zu $x + F$ inverse Element ist.

Mit ähnlichen Argumenten zeigt man $\alpha(x + F) = (\alpha x) + F \in E/F$ für $\alpha \neq 0$. Zusammen mit der Definition für $\alpha = 0$ erhält man die entsprechenden Rechenregeln für die skalare Multiplikation. Die Assoziativität, die Distributivgesetze und die Neutralität der Eins übertragen sich wieder direkt.

(b) Ist E ein normierter Vektorraum und F ein abgeschlossener Unterraum, so wird E/F durch $\|x + F\| := \inf_{y \in x+F} \|y\| = \inf_{f \in F} \|x + f\| = \operatorname{dist}(x, -F) = \operatorname{dist}(x, F)$ zu einem normierten Vektorraum. (2)

Lösung: Die Eigenschaft $\|x + F\| \in [0, \infty)$ ist offensichtlich; genauer gilt sogar $\|x + F\| \leq \|x\|$. Ist nun $\|x + F\| = 0$, so ist $\operatorname{dist}(x, F) = 0$. Es gibt also eine Folge (f_n) in F mit $\|x - f_n\| \to 0$. Weil (f_n) gegen x konvergiert und F abgeschlossen ist, folgt $x \in F$. Also ist $x + F = F$, also $x + F$ das Nullelement von E/F. Dies zeigt die positive Definitheit.

Sei nun $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x \in E$. Ist $\alpha = 0$, so ist offenbar $\|\alpha(x + F)\| = 0 = |\alpha|\,\|x + F\|$. Sei nun $\alpha \neq 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $y \in F$ mit $\|x - y\| < \|x + F\| + \varepsilon$. Wegen $\alpha y \in F$ folgt daraus

$$\|\alpha x + F\| \leq \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\,\|x - y\| \leq |\alpha|\,\|x + F\| + |\alpha|\,\varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt $\|\alpha x + F\| \leq |\alpha|\,\|x + F\|$. Wendet man diese Überlegung auf αx statt x mit $\frac{1}{\alpha}$ statt α an, erhält man $\|x + F\| \leq \frac{1}{|\alpha|}\|\alpha x + F\|$. Insgesamt zeigt dies $\|\alpha x + F\| = |\alpha|\,\|x + F\|$, also die Homogenität.

Seien nun $x, y \in E$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $e, f \in F$ mit $\|x - e\| < \|x + F\| + \varepsilon$ und $\|y - f\| \leq \|y + F\| + \varepsilon$. Wegen $e + f \in F$ zeigt dies

$$\|(x + y) + F\| \leq \|x + y - (e + f)\| \leq \|x - e\| + \|y - f\| \leq \|x + F\| + \|y + F\| + 2\varepsilon.$$

Durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ folgt hieraus die Dreiecksungleichung.

(c) Ist E ein Banachraum und F abgeschlossen, so ist E/F vollständig. (2)

Tipp: Man kann hierfür Aufgabe 19 verwenden.

Lösung: Sei $(x_n + F)$ eine Folge in E/F mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + F\| < \infty$. Es gibt $y_n \in F$ mit $\|x_n - y_n\| < \|x_n + F\| + 2^{-n}$. Daraus folgt $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \infty$. Laut Aufgabe 19 konvergiert dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n) =: x$ in E. Damit gilt

$$\Big\|\sum_{n=1}^{N}(x_n + F) - (x + F)\Big\| = \Big\|\sum_{n=1}^{N} x_n - x + F\Big\| \leq \Big\|\sum_{n=1}^{N} x_n - x - \sum_{n=1}^{N} y_n\Big\|$$
$$= \Big\|\sum_{n=1}^{N}(x_n - y_n) - x\Big\| \to 0. \quad (N \to \infty)$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n + F) = x + F$. Hiermit ist nachgerechnet, dass jede absolut konvergente Reihe konvergiert. Laut Aufgabe 19 folgt daraus, dass E/F vollständig ist.

(d) Ist E ein separabler normierter Raum und F abgeschlossen, so ist E/F separabel. (1)

Lösung: Sei $\{x_n\}$ eine dichte Menge in E. Sei nun $x+F$ aus E/F und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|x - x_n\| < \varepsilon$, also $\|(x+F) - (x_n+F)\| \leq \|x - x_n\| < \varepsilon$. Folglich ist $\{x_n + F\}$ eine dichte Menge in E/F.

45. Sei $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Zeige, dass $\ell^p \subset \ell^q$ gilt und es sogar Konstanten c_{pq} mit $\|x\|_q \leq c_{pq}\|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ gibt. (2)

Lösung: Für $p = \infty$ ist auch $q = \infty$ und damit die Aussage trivial. Sei also im Folgenden $p < \infty$. Zuerst macht man sich klar, dass für alle $x \in \ell^p$ die Abschätzung

$$\|x\|_\infty = \Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\Big)^{1/p} = \|x\|_p$$

gilt. Damit ist die Aussage bereits für $q = \infty$ gezeigt. Ist nun $q < \infty$, so kann man aus

$$\|x\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p |x_n|^{q-p} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \, \|x\|_\infty^{q-p} \leq \|x\|_p^p \, \|x\|_\infty^{q-p} \leq \|x\|_p^q$$

die Abschätzung $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für alle $x \in \ell^p$ ablesen. Damit ist die Behauptung für alle $p \leq q$ gezeigt, und man kann sogar $c_{pq} = 1$ wählen.

Alternative Lösung: Der Fall $p = \infty$ ist wie gesagt trivial. Sei $p < \infty$ und $x \in \ell^p$. Dann ist nach dem Trivialkriterium für Reihenkonvergenz $x = (x_n)$ eine Nullfolge und insbesondere $x \in \ell^\infty$. Es gibt also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1$ für alle $n \geq n_0$. Daraus folgt für $q \in [p, \infty)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^q \leq \sum_{n=1}^{n_0} |x_n|^q + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |x_n|^p < \infty,$$

also $x \in \ell^q$. Dies zeigt bereits den ersten Teil der Behauptung. Betrachte nun für $p \leq q$ die Identität $I\colon \ell^p \to \ell^q$. Nach dem soeben gezeigten ist diese Abbildung wohldefiniert, und die Linearität von I ist offensichtlich. Weil Konvergenz in ℓ^p und in ℓ^q jeweils komponentenweise Konvergenz impliziert, sieht man sofort, dass I abgeschlossen ist. Der gleiche Beweis wie im Fall $p = 1$ und $p = 2$ zeigt, dass ℓ^p für jedes $p \in [1, \infty)$ ein Banachraum ist, und der Fall $p = \infty$ wurde schon in der Vorlesung behandelt. Also kann man den Satz vom abgeschlossenen Graphen anwenden, um zu sehen, dass I stetig ist. Dies zeigt $\|x\|_q = \|Ix\|_q \leq c_{pq}\|x\|_p$ mit $c_{pq} = \|I\|$.