Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 17 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 12

46. Seien X und Y normierte Räume und $J\colon X \to Y$ ein Isomorphismus. Zeige:

(a) Genau dann gilt $\|J\| \le 1$ und $\|J^{-1}\| \le 1$, wenn J isometrisch ist. (1)

(b) Ist $X \neq \{0\}$, $\varphi \in Y'$ und $\psi = \varphi \circ J$, so ist $\psi \in X'$ und es gilt genauer sogar $\left\|J^{-1}\right\|^{-1} \|\varphi\| \le \|\psi\| \le \|J\| \, \|\varphi\|$. Ist J sogar isometrisch, so folgt $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (1)

47. Sei $1 \le p \le \infty$. Zu $g \in L^{p'}(\Omega)$ definiere $\varphi_g(f) := \int_\Omega fg$. Laut Vorlesung ist $g \mapsto \varphi_g$ eine stetige lineare Abbildung von $L^{p'}(\Omega)$ nach $L^p(\Omega)'$ mit $\|\varphi_g\| \le \|g\|_{p'}$. Zeige:

(a) Sei $p \neq 1$ oder (Ω, Σ, μ) σ-endlich. Dann ist $\|\varphi_g\| = \|g\|_{p'}$. (6)

(b) Es gibt einen Maßraum (Ω, Σ, μ) und $g \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|\varphi_g\| \neq \|g\|_\infty$. (1)
Tipp: Betrachte beispielsweise $\Omega = \mathbb{R}$ mit dem Lebesguemaß $\mu = \lambda$ und der σ-Algebra $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.

48. Sei H ein Hilbertraum, $T \in \mathscr{L}(H)$. Zeige, dass $x \in H$ mit $\|x\| = 1$ genau dann ein Eigenvektor von T ist, wenn $|(Tx|x)| = \|Tx\|$ gilt! (3)
Tipp: Man kann den Eigenwert raten und dann nachrechnen, dass $\|Tx - \lambda x\|^2 = 0$ gilt.

49. Sei $1 \le p < \infty$. Zu $y \in \ell^{p'}$ definiere $\varphi_y(x) := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$. Zeige, dass die Zuordnung $y \mapsto \varphi_y$ ein isometrischer Isomorphismus von $\ell^{p'}$ nach $(\ell^p)'$ ist! (5)
Tipp: Für die Surjektivität kann man $y_n := \varphi(e_n)$ definieren und $\varphi = \varphi_y$ nachrechnen.

Bonusaufgabe

(a) Für $q \in (1, \infty]$ gilt $\bigcup_{p<q} \ell^p \neq \ell^q$ und für $p \in [1, \infty)$ gilt $\ell^p \neq \bigcap_{q>p} \ell^q$. Insbesondere ist $\ell^p \neq \ell^q$ für $p \neq q$. (3)

(b) Für $q \in (1, \infty]$ gilt $\bigcap_{p<q} L^p(0,1) \neq L^q(0,1)$ und für $p \in [1, \infty)$ gilt $L^p(0,1) \neq \bigcup_{q>p} L^q(0,1)$. Insbesondere ist $L^p(0,1) \neq L^q(0,1)$ für $p \neq q$. (3)