Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 13

50. Sei A eine Menge und $\mathscr{P}(A)$ ihre Potenzmenge. Zeige, dass es keine surjektive Abbildung von A nach $\mathscr{P}(A)$ gibt! (1)
Tipp: Imitiere den Beweis der Russel'schen Antinomie.

Lösung: Nehmen wir an, es gäbe eine surjektive Abbildung f von A nach $\mathscr{P}(A)$. Definiere $X := \{a \in A : a \notin f(a)\} \subset A$. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in A$ mit $X = f(x)$. Nach Definition ist $x \in X$ äquivalent zu $x \notin f(x) = X$, was absurd ist.

51. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $\mathcal{F} \subset \Sigma$ eine σ-Algebra. Wir schreiben $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ für die bedingte Erwartung von $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ unter $\mathcal{F}$. Zeige oder widerlege:

(a) Ist $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $Y \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, so ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = Y$ genau dann, wenn Y in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ liegt und $\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_A Y \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt. (2)

Lösung: Die Aussage ist richtig.
Sei $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Wähle eine Folge $X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, die in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegen X konvergiert, beispielsweise bestehend aus einfachen Funktionen. Dann konvergiert wegen Stetigkeit $Y_n := \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}]$ in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gegen $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$. Weil $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Banachraum und damit abgeschlossen in $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist, folgt $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Wegen $X_n \in L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist $\int_A X_n \,\mathrm{d}\mu = \int_A \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}] \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ laut Vorlesung. Für $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$ gilt also

$$\int_A X \,\mathrm{d}\mu \leftarrow \int_A X_n \,\mathrm{d}\mu = \int_A Y_n \,\mathrm{d}\mu \to \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \,\mathrm{d}\mu$$

nach Wahl von X_n und Y_n. Damit hat $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ die beschriebenen Eigenschaften.
Ist umgekehrt $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ eine Funktion mit $\int_A Y \,\mathrm{d}\mu = \int_A X \,\mathrm{d}\mu$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$, so ist $Z := Y - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ in $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und nach obigen Überlegungen $\int_A Z \,\mathrm{d}\mu = 0$ für alle $A \in \mathcal{F}$ mit $\mu(A) < \infty$. Speziell für $A_m^{\pm} := \{\pm Z > \frac{1}{m}\}$ zeigt dies, dass für jedes m fast überall $|Z| \le \frac{1}{m}$ gilt. Daraus folgt, dass fast überall $Z = 0$ gilt, also $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$ ist.

(b) Für $A \in \mathcal{F}$ und $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt $\int_A X \,\mathrm{d}\mu = \int_A \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \,\mathrm{d}\mu$. (1)

Lösung: Die Aussage ist im Allgemeinen falsch.
Sei $(\Omega, \Sigma, \mu) := (\mathbb{R}, \mathscr{B}, \lambda)$, $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega\}$ und $X := \mathbb{1}_{(0,1)}$. Wegen $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu) = \{0\}$ ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = 0$. Also ist $\int_\Omega X \,\mathrm{d}\mu = 1 \neq 0 = \int_\Omega \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

(c) $\mathbb{E}\big[|X|\big|\mathcal{F}\big] = \big|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}]\big|$ (1)

Lösung: Die Aussage ist im Allgemeinen falsch.
Betrachte $\Omega := \{0, 1\}$, $\Sigma := \mathscr{P}(\Omega)$, $\mu(0) := \mu(1) = 1$, $\mathcal{F} := \{\emptyset, \Omega\}$ und $X(0) := -1$, $X(1) := 1$. Dann ist $|X| \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und daher $\mathbb{E}\big[|X|\big|\mathcal{F}\big] = |X| = 1$. Zudem rechnet man mit der charakterisierenden Eigenschaft des ersten Aufgabenteils schnell $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = 0$ nach.

(d) Sei $A_i \in \Sigma$, $i \in \mathbb{N}$, mit $\Omega = \bigcup_{i=1}^\infty A_i$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $0 < \mu(A_i) < \infty$. Sei $\mathcal{F} := \sigma(A_i : i \in \mathbb{N})$ die kleinste σ-Algebra, die jedes A_i enthält. Dann ist $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} X \,\mathrm{d}\mu \; \mathbb{1}_{A_i}$ für $X \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. (2)

Lösung: Die Aussage ist richtig.

Sei $Y := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_i)} \int_{A_i} X \,\mathrm{d}\mu \;\mathbb{1}_{A_i}$. Offenbar ist Y $\mathcal{F}$-messbar, und nach dem Satz über die monotone Konvergenz ist

$$\int_\Omega |Y| \,\mathrm{d}\mu \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu(A_i)} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \int_{A_i} |X| \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega |X| \,\mathrm{d}\mu = \|X\|_1,$$

also $Y \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Man kann leicht nachrechnen, dass $\mathcal{A} := \{\bigcup_{i\in I} A_i | I \subset \mathbb{N}\}$ eine σ-Algebra ist, die jedes A_i enthält, und dass jede σ-Algebra, die jedes A_i enthält, auch $\mathcal{A}$ enthalten muss. Also ist $\mathcal{F} = \mathcal{A}$. Sei nun $B \in \mathcal{F}$, also $B = \bigcup_I A_i$ für ein $I \subset \mathbb{N}$. Nach dem Satz von Lebesgue gilt

$$\int_B X \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I} \int_{A_i} X \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i\in I} \int_\Omega \frac{1}{\mu(A_i)} \mathbb{1}_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \int_{A_i} X \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mathbb{1}_B Y \,\mathrm{d}\mu = \int_B Y \,\mathrm{d}\mu.$$

Nach der Charakterisierung des ersten Aufgabenteils ist also $Y = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]$.

52. Zeige, dass es Teilmengen $(A_i)_{i\in I}$ von $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften gibt: jedes A_i abzählbar; sind $i, j \in I$, so gilt $A_i \subset A_j$ oder $A_j \subset A_i$; $\bigcup_{i\in I} A_i$ ist überabzählbar. (2)
Tipp: Kann man das Lemma von Zorn auf die bezüglich Inklusion partiell geordnete Menge der abzählbaren Teilmengen von $\mathbb{R}$ anwenden?

Lösung: Betrachte die im Tipp angegebene Menge $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$. Offenbar besitzt $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$ kein maximales Element, da es zu jeder abzählbaren Teilmenge A von $\mathbb{R}$ ein Element $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin A$ gibt. Dann ist aber $A \subset A \cup \{x\} \in \mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$, und $A \neq A \cup \{x\}$, also A nicht maximal. Da $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$ kein maximales Element besitzt, sind die Voraussetzungen des Lemmas von Zorn nicht erfüllt. Es gibt also eine total geordnete Teilmenge $\mathscr{A} = (A_i)_{i\in I}$ von $\mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$ ohne obere Schranke. Wegen $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$ ist die erste Eigenschaft erfüllt. Dass $\mathscr{A}$ total geordnet ist, bedeutet gerade, dass die zweite Eigenschaft erfüllt ist. Wäre nun $B := \bigcup_{i\in I} A_i$ abzählbar, so wäre $B \in \mathscr{P}_\omega(\mathbb{R})$ eine obere Schranke von $\mathscr{A}$ im Widerspruch zur Wahl von $\mathscr{A}$. Also ist auch die dritte Eigenschaft erfüllt.

53. Ist H ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in H, so heißt (x_n) schwach gegen x konvergent, falls $(x_n|y) \to (x|y)$ für alle $y \in H$ gilt, und man schreibt dafür $x_n \rightharpoonup x$. Zeige:

(a) Eine Folge (x_n) in ℓ^2 ist genau dann schwach konvergent, wenn sie beschränkt ist und komponentenweise konvergiert. (2)
Tipp: Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit und Satz von Riesz-Fréchet

Lösung: Sei $x_n \rightharpoonup x$. Dann gilt insbesondere $(x_n|e_k) \to (x|e_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, was komponentenweise Konvergenz bedeutet. Definiert man $\varphi_n(y) := (y|x_n)$, so ist $\varphi_n \in (\ell^2)'$ mit $\|\varphi_n\| = \|x_n\|$. Nach Voraussetzung ist die Menge $\{\varphi_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$ für jedes $y \in \ell^2$ beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist daher $\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in $(\ell^2)'$, also (x_n) beschränkt in ℓ^2.
Sei nun (x_n) beschränkt und komponentenweise konvergent. Betrachte wie oben $\varphi_n \in (\ell^2)'$, $\varphi_n(y) := (y|x_n)$. Dann ist φ_n beschränkt in $(\ell^2)'$ und auf der totalen Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \ell^2$ konvergent. Laut Vorlesung ist φ_n also stark konvergent gegen ein stetiges Funktional $\varphi \in (\ell^2)'$. Nach dem Satz von Riesz-Fréchet gibt es ein $x \in \ell^2$ mit $\varphi(y) = (y|x)$ für alle $y \in \ell^2$. Insgesamt ergibt sich

$$(y|x_n) = \varphi_n(y) \to \varphi(y) = (y|x)$$

für alle $y \in \ell^2$, also nach Definition $x_n \rightharpoonup x$.

(b) Ist (x_n) eine beschränkte Folge in einem Hilbertraum, so besitzt (x_n) eine schwach konvergente Teilfolge. (2)
Tipp: Betrachte zuerst ℓ^2, dann separable und schließlich beliebige Hilberträume.

Lösung: Ist (x_n) eine beschränkte Folge in ℓ^2, so sind insbesondere die Komponentenfolgen beschränkt. Nach dem Diagonalfolgenprinzip gibt es also eine komponentenweise konvergente Teilfolge von (x_n). Da diese natürlich immer noch beschränkt ist, ist sie nach dem ersten Aufgabenteil schwach konvergent.

Ist H ein separabler Hilbertraum, so gibt es laut Vorlesung einen unitären Isomorphismus $J\colon H \to \ell^2$. Sei (x_n) eine beschränkte Folge in H. Dann ist $(y_n) := (Jx_n)$ eine beschränkte Folge in ℓ^2. Also gibt es ein schwach konvergente Teilfolge $y_{n_k} \rightharpoonup y$. Dann gilt

$$(x_{n_k}|z) = (Jx_{n_k}|Jz) \to (y|Jz) = (J^*y|z) .$$

für alle $z \in H$, also $x_{n_k} \rightharpoonup J^*y$. Also hat auch hier jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.

Sei schließlich H ein beliebiger Hilbertraum und (x_n) eine Folge in H. Dann ist $U := \overline{\operatorname{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ ein separabler Hilbertraum und (x_n) eine beschränkte Folge in U. Es gibt also eine in U schwach konvergente Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n), also ein $x \in U$ mit $(x_{n_k}|y) \to (x|y)$ für alle $y \in U$. Sei nun $z \in H$ beliebig. Nach dem Projektionssatz ist $z = z_1 + z_2$ mit $z_1 \in U$ und $z_2 \in U^\perp$. Daher gilt

$$(x_{n_k}|z) = (x_{n_k}|z_1) + (x_{n_k}|z_2) \to (x|z_1) = (x|z_1) + (x|z_2) = (x|z) ,$$

also tatsächlich $x_{n_k} \rightharpoonup x$ in H.

(c) Zu $u \in L^2(\mathbb{R})$ definiere $D_h u(x) := \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$. Gibt es $h_n > 0$ mit $h_n \to 0$ und $(D_{h_n}u)|_{(0,1)} \rightharpoonup v \in L^2(0,1)$, so ist $u|_{(0,1)} \in H^1(0,1)$ und $u' = v$. (2)

Lösung: Offenbar ist $u|_{(0,1)} \in L^2(0,1)$. Nach Definition muss nur $\int_0^1 u\varphi' = -\int_0^1 v\varphi$ für alle $\varphi \in \mathscr{D}(0,1) = \mathrm{C}_c^\infty(0,1)$ gezeigt werden. Beachte dazu, dass für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} D_h f\, g &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x-h)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\, D_{-h} g\end{aligned}$$

mit $(D_{-h}u)(x) := -\frac{g(x-h)-g(x)}{-h}$ gilt.

Sei (h_n) wie in der Aufgabenstellung und $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$. Nach Definition der klassischen Differenzierbarkeit gilt punktweise $D_{-h_n}\varphi \to -\varphi'$, und nach dem Mittelwertsatz ist $|D_{-h_n}\varphi| \le \|\varphi'\|_\infty < \infty$. Aus dem Satz von Lebesgue und den Voraussetzungen folgt also

$$-\int_0^1 u\varphi' \leftarrow \int_0^1 u\, D_{-h_n}\varphi = \int_0^1 D_{h_n}u\, \varphi \to \int_0^1 v\varphi.$$

Dies bedeutet gerade $u|_{(0,1)} \in H^1(0,1)$ mit $u' = v$.

(d) Ist H ein reeller Hilbertraum, $C \subset H$ abgeschlossen und konvex und (x_n) eine Folge in C mit $x_n \rightharpoonup x$ in H, so ist $x \in C$. (1)
Tipp: Man kann die Trennungssätze verwenden.

Lösung: Wegen $x_n \in C$ ist $C \neq \emptyset$. Wäre $x \notin C$, so gäbe es nach dem Trennungssatz ein $p \in H$ und $\varepsilon > 0$ mit $(p|y) \le (p|x) - \varepsilon$ für alle $y \in C$, also insbesondere für $y = x_n$. Nach Definition der schwachen Konvergenz folgt daraus im Grenzwert $n \to \infty$ der Widerspruch $(p|x_n) \to (p|x) \le (p|x) - \varepsilon$.

(e) Die Menge $\{u \in L^\infty(0,1) : \|u\|_\infty \le L\}$ ist für jedes $L \ge 0$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von $L^2(0,1)$. (1)

Lösung: Offenbar ist $C := \{u \in L^\infty(0,1) : \|u\|_\infty \le L\}$ eine konvexe Teilmenge von $L^2(0,1)$. Sei nun (u_n) eine Folge in C mit $u_n \to u$ in $L^2(0,1)$. Laut Vorlesung gibt es dann eine Teilfolge von (u_n), die punktweise fast überall konvergiert; diese sei wiederum mit (u_n) bezeichnet. Sei also $N_0 \subset (0,1)$ eine Nullmenge und $u_n(x) \to u(x)$ für $x \notin N_0$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Nullmenge $N_n \subset (0,1)$ mit $|u_n(x)| \leq L$ für $x \notin N_n$. Definiere $N := N_0 \cup \bigcup_n N_n$. Dann ist N wiederum eine Nullmenge und $|u(x)| = \lim_n |u_n(x)| \leq L$ für alle $x \notin N$. Also ist $u \in C$, was die Abgeschlossenheit von C zeigt.

(f) Ist $u\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist $u \in H^1(0,1)$ und $u' \in L^\infty(0,1)$. (2)

Lösung: Sei $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R})$ eine Lipschitz-stetige Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}$, beispielsweise

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & x \in [0,1] \\ (1+x)u(0), & x \in (-1,0) \\ (2-x)u(1), & x \in (1,2) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach Definition der Lipschitz-Stetigkeit ist $|(D_h\tilde{u})(x)| \leq L$, wobei L die Lipschitz-Konstante von $\tilde{u}$ bezeichnet. Insbesondere ist $\|(D_h\tilde{u})|_{(0,1)}\|_2 \leq \|D_h\tilde{u}\|_\infty \leq L$. Sei (h_n) eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen und $v_n := (D_{h_n}\tilde{u})|_{(0,1)}$. Dann ist (v_n) nach obigen Überlegungen beschränkt in $L^2(0,1)$. Nach Aufgabenteil (b) gibt es eine schwach konvergente Teilfolge (v_{n_k}) von (v_n), deren Grenzwert v nach Aufgabenteilen (d) und (e) wieder in $L^\infty(0,1)$ liegt und $\|v\|_\infty \leq L$ erfüllt. Weil auch (h_{n_k}) eine Nullfolge positiver Zahlen ist, folgt aus Aufgabenteil (c), dass $\tilde{u}|_{(0,1)} = u$ in $H^1(0,1)$ liegt und $u' = v$ in $L^\infty(0,1)$ ist.

(g) $u\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $u(x) := |2x-1|$, liegt in $H^1(0,1)$. Bestimme die Ableitung! (1)

Lösung: Der vorige Aufgabenteil zeigt bereits $u \in H^1(0,1)$. Es soll noch gezeigt werden, dass $u' = v := 2\,\mathbb{1}_{(1/2,1)} - 2\,\mathbb{1}_{(0,1/2)}$ gilt. Sei dazu $\varphi \in \mathscr{D}(0,1)$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u\varphi' &= \int_0^{1/2} (1-2x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 (2x-1)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x \\
&= (1-2x)\varphi(x)\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} (-2)\varphi(x)\,\mathrm{d}x + (2x-1)\varphi(x)\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 2\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \varphi(0) + \varphi(1) - \int_0^1 v(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 v\varphi.
\end{aligned}$$

Wegen $v \in L^2(0,1)$ heißt diese Gleichung definitionsgemäß $u' = v$ im schwachen Sinne.