Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 22 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 14

54. Sei φ_y für $y \in \ell^1$ wie in Aufgabe 49 definiert. Zeige, dass es ein $\varphi \in (\ell^\infty)'$ gibt, das nicht von der Form $\varphi = \varphi_y$ für ein $y \in \ell^1$ ist! (2)
Tipp: Wende Satz (31.6) auf $c_0 \subset \ell^\infty$ an.

55. Sei X ein separabler Banachraum. Zeige, dass es einen abgeschlossenen Unterraum U von ℓ^∞ und einen isometrischen Isomorphismus $J\colon X \to U$ gibt! (3)
Tipp: Betrachte einen Operator $T\colon X \to \ell^\infty$, dessen Komponenten geeignete stetige Funktionale auf X sind.

56. Sei $L\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ der Linksshift, also $L(x_n) = (x_{n+1})$. Ein lineares Funktional $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls es folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\varphi \circ L = \varphi$;

(ii) ist $x \geq 0$ (komponentenweise), so ist $\varphi(x) \geq 0$;

(iii) ist $\mathbf{1} \in \ell^\infty$ die konstante Eins-Folge, so ist $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Im Folgenden sind Ungleichungen, Beträge, Multiplikation usw. bei Elementen von ℓ^∞ komponentenweise zu verstehen. Zeige:

(a) Ein Banachlimes φ hat die folgenden Eigenschaften: (6)

(I) φ ist monoton (d.h.: aus $x \leq y$ folgt $\varphi(x) \leq \varphi(y)$);

(II) $|\varphi(x)| \leq \varphi(|x|)$ für alle $x \in \ell^\infty$;

(III) φ ist stetig und $\|\varphi\| = 1$;

(IV) ist $x \in c$ eine konvergente Folge, so ist $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$;

(V) ist $x \in \ell^\infty$ periodisch mit Periodenlänge $p \geq 1$, so ist $\varphi(x) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} x_n$;

(VI) für alle $x \in \ell^\infty$ gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

(b) Es gibt keinen Banachlimes φ, der $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ für alle x und y in ℓ^∞ erfüllt. (1)

(c) Es gibt einen Banachlimes. (4)
Tipp: Man kann zeigen, dass $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$ sublinear ist und den Satz von Hahn-Banach auf das Funktional lim auf c anwenden.

(d) Der Banachlimes ist nicht eindeutig bestimmt; genauer: Es gibt voneinander verschiedene Banachlimites. (2)

57. Sei X ein reeller normierter Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und konvex und $g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und konkav, also $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ und $g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in X$. Zudem gelte $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in X$. Zeige, dass es dann eine stetige, affine Funktion $h\colon X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ gibt; affin bedeutet, dass $h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in X$ gilt. (4)
Tipp: Zeige zuerst, dass die Mengen $A := \{(x,t) : t > f(x)\}$ und $B := \{(x,t) : t < g(x)\}$ im normierten Raum $X \oplus \mathbb{R}$ offen und konvex sind!