UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 22 Punkte

Lösungen zur Funktionalanalysis

Blatt 14

54. Sei φ_y für $y \in \ell^1$ wie in Aufgabe 49 definiert. Zeige, dass es ein $\varphi \in (\ell^\infty)'$ gibt, das nicht von der Form $\varphi = \varphi_y$ für ein $y \in \ell^1$ ist! (2)
Tipp: Wende Satz (31.6) auf $c_0 \subset \ell^\infty$ an.

Lösung: Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\varphi \in (\ell^\infty)'$, $\varphi \neq 0$, mit $\varphi|_{c_0} = 0$, denn c_0 ist ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞. Wäre aber $\varphi = \varphi_y$ mit $y \in \ell^1$, so wäre nach Definition von φ_y die Folge $y = (y_n)$ durch $y_n = \varphi_y(e_n)$ gegeben. Wegen $e_n \in c_0$ wäre dann also $y = 0$ nach Wahl von φ, und damit offenbar $\varphi = \varphi_y = 0$ im Widerspruch zur Wahl von φ.

55. Sei X ein separabler Banachraum. Zeige, dass es einen abgeschlossenen Unterraum U von ℓ^∞ und einen isometrischen Isomorphismus $J\colon X \to U$ gibt! (3)
Tipp: Betrachte einen Operator $T\colon X \to \ell^\infty$, dessen Komponenten geeignete stetige Funktionale auf X sind.

Lösung: Sei (x_n) dicht in X. Nach einer Variante es Satzes von Hahn-Banach gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein stetiges Funktional $\varphi_n \in X'$ mit $\|\varphi_n\| = 1$ und $\varphi_n(x_n) = \|x_n\|$. Definiere die Abbildung $Tx := (\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|\varphi_n(x)| \leq \|\varphi_n\|\,\|x\| \leq \|x\|$ ist $Tx \in \ell^\infty$ und $\|Tx\|_\infty \leq \|x\|$, also insbesondere $T\colon X \to \ell^\infty$ stetig. Zudem ist $\|Tx_n\| \geq |\varphi_n(x_n)| = \|x_n\|$ (also $\|Tx_n\| = \|x_n\|$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Also stimmen die stetigen Funktionen $x \mapsto \|Tx\|$ und $x \mapsto \|x\|$ auf der dichten Menge $\{x_n\}$ überein, was $\|Tx\| = \|x\|$ für alle $x \in X$ zeigt. Daher ist $U := \operatorname{Rg} T$ nach Aufgabe 29 ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ und T ein isometrischer Isomorphismus zwischen X und $\operatorname{Rg} T$.

56. Sei $L\colon \ell^\infty \to \ell^\infty$ der Linksshift, also $L(x_n) = (x_{n+1})$. Ein lineares Funktional $\varphi\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls es folgende Eigenschaften besitzt:

(i) $\varphi \circ L = \varphi$;
(ii) ist $x \geq 0$ (komponentenweise), so ist $\varphi(x) \geq 0$;
(iii) ist $\mathbf{1} \in \ell^\infty$ die konstante Eins-Folge, so ist $\varphi(\mathbf{1}) = 1$.

Im Folgenden sind Ungleichungen, Beträge, Multiplikation usw. bei Elementen von ℓ^∞ komponentenweise zu verstehen. Zeige:

(a) Ein Banachlimes φ hat die folgenden Eigenschaften: (6)
  (I) φ ist monoton (d.h.: aus $x \leq y$ folgt $\varphi(x) \leq \varphi(y)$);
  (II) $|\varphi(x)| \leq \varphi(|x|)$ für alle $x \in \ell^\infty$;
  (III) φ ist stetig und $\|\varphi\| = 1$;
  (IV) ist $x \in c$ eine konvergente Folge, so ist $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$;
  (V) ist $x \in \ell^\infty$ periodisch mit Periodenlänge $p \geq 1$, so ist $\varphi(x) = \frac{1}{p}\sum_{n=1}^{p} x_n$;
  (VI) für alle $x \in \ell^\infty$ gilt $\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \varphi(x) \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$.

  Lösung: Es ist für die Aufgabe nicht entscheidend, ob man beim Begriff des *Funktionals* Stetigkeit annimmt oder nicht, da die Stetigkeit automatisch aus den anderen Eigenschaften folgt. Die Aufgabe war so gemeint, dass ein Funktional nicht stetig zu sein braucht. Nimmt man hingegen die Stetigkeit in die Definition auf, muss man bei der Existenz natürlich zusätzlich Stetigkeit zeigen.

(I) Ist $x \le y$, so ist $y - x \ge 0$, llso $\varphi(y-x) \ge 0$ nach Voraussetzung (ii) und somit $\varphi(y) \ge \varphi(x)$ wegen Linearität.

(II) Wegen $x \le |x|$ und $-x \le |x|$ ist $\varphi(x) \le \varphi(|x|)$ und $-\varphi(x) = \varphi(-x) \le \varphi(|x|)$ nach Eigenschaft (I), insgesamt also $|\varphi(x)| \le \varphi(|x|)$.

(III) Sei $x \in \ell^\infty$ mit $\|x\|_\infty \le 1$. Dann ist $|x| \le \mathbf{1}$, und daher nach (II), (I) und (iii) $|\varphi(x)| \le \varphi(|x|) \le \varphi(\mathbf{1}) = 1$. Nach Definition zeigt dies $\|\varphi\| \le 1$. Da aber $\varphi(\mathbf{1}) = 1$ und $\|\mathbf{1}\|_\infty = 1$ ist, gilt sogar $\|\varphi\| = 1$.

(IV) Dies folgt aus (VI), soll hier aber auch direkt bewiesen werden. Sei a der Grenzwert von $x \in c$, und sei $y := x - a\mathbf{1}$. Dann ist $y \in c_0$. Zu $\varepsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|y_n| \le \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Dann ist $\|L^n y\|_\infty \le \varepsilon$, und daher ergibt sich $|\varphi(y)| = |\varphi(L^n y)| \le \|L^n y\|_\infty \le \varepsilon$ nach (i) und (III). Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, zeigt dies $\varphi(y) = 0$. Daraus folgt $\varphi(x) = \varphi(y + a\mathbf{1}) = a$ mit (iii) aus der Linearität von φ.

(V) Ist p eine Periode von $x \in \ell^\infty$, so ist $\sum_{k=1}^p L^k x = \sum_{k=1}^p x_k \mathbf{1}$, wie man leicht einsieht. Daraus ergibt sich

$$p\varphi(x) = \sum_{k=1}^p \varphi(x) = \sum_{k=1}^p \varphi(L^k x) = \varphi\big(\textstyle\sum_{k=1}^p x_k \mathbf{1}\big) = \displaystyle\sum_{k=1}^p x_k$$

unter Verwendung von (i) und (iii), was die Behauptung zeigt.

(VI) Sei $a := \liminf_{n\to\infty} x_n$ und $b := \limsup_{n\to\infty} x_n$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ also $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon \le x_n \le b + \varepsilon$ für $n \ge n_0$. Dies kann man auch als $(a-\varepsilon)\mathbf{1} \le L^n x \le (b+\varepsilon)\mathbf{1}$ für $n \ge n_0$ schreiben. Wegen (i), (I) und (iii) gilt dann $(a-\varepsilon) \le \varphi(L^n x) = \varphi(x) \le (b+\varepsilon)$. Mit dem Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ ergibt dies $a \le \varphi(x) \le b$ wie behauptet.

(b) Es gibt keinen Banachlimes φ, der $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ für alle x und y in ℓ^∞ erfüllt. (1)

Lösung: Sei $x := ((-1)^n)$. Dann ist $\varphi(x) = 0$ nach (V), aber $x \cdot x = \mathbf{1}$, also $\varphi(x \cdot x) = 1 \ne 0 = \varphi(x) \cdot \varphi(x)$.

(c) Es gibt einen Banachlimes. (4)
Tipp: Man kann zeigen, dass $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ sublinear ist und den Satz von Hahn-Banach auf das Funktional lim auf c anwenden.

Lösung: Dies folgt aus dem letzten Aufgabenteil, könnte aber auch direkt mit der gleichen Technik gelöst werden, wobei allerdings weniger Eigenschaften zu überprüfen sind, denn man benötigt hier die dort definierte Folge z nicht, sondern kann F als den von $\mathbf{1}$ aufgespannten Unterraum definieren, auf dem man $\psi(t\mathbf{1}) := t$ setzt. Man kann alternativ auch $F = c$ und $\psi(x) := \lim_{n\to\infty} x_n$ nehmen. Im ersten Fall ist $\psi(x) = p(x)$ auf diesem Unterraum offensichtlich; im zweiten Fall ist dies ebenfalls richtig. Die Überprüfung, dass die Fortsetzung φ von ψ ein Banachlimes ist, wird wie im letzten Aufgabenteil durchgeführt. Damit ist die Aufgabe gelöst; die Zusatzüberlegung zur Existenz einer Folge z entfällt.

(d) Der Banachlimes ist nicht eindeutig bestimmt; genauer: Es gibt voneinander verschiedene Banachlimites. (2)

Lösung: Sei $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$. Offenbar ist $p(x) \le \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n$, also $p(x) \le \|x\|_\infty$ und damit für jedes $x \in \ell^\infty$ endlich. Da positive Skalare mit lim sup vertauschen, ist $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ für alle $\lambda \ge 0$. Wegen der Rechenregel $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ für Folgen (a_n) und (b_n) gilt $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in \ell^\infty$. Also ist p sublinear.
Sei $z \in \ell^\infty$ nicht konstant, $\alpha := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$, $\beta := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$, und $c \in [\alpha, \beta]$ beliebig. Definiere auf dem von z und $\mathbf{1}$ aufgespannten zweidimensionalen Unterraum F das Funktional $\psi(tz + s\mathbf{1}) := tc + s$. Dann ist ψ linear und

es gilt $\psi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in F$ nach Wahl von c. Genauer gesagt gelten wegen $c \leq \beta = p(z)$ und $c \geq \alpha = -p(-z)$ nach Wahl von c die Abschätzungen $\psi(z) = c \leq \beta = p(z)$ und $\psi(-z) = -c \leq -\alpha = p(-z)$, was bereits $\psi(tz) \leq p(tz)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zeigt. Wegen $p(tz + s\mathbf{1}) = p(tz) + s$ folgt daraus die Abschätzung auf ganz F.

Nach Hahn-Banach gibt es ein lineares Funktional φ auf ℓ^∞ mit $\varphi(x) \leq p(x)$ für $x \in \ell^\infty$ und $\varphi|_F = \psi$. Nun soll gezeigt werden, dass φ ein Banachlimes ist.

(i) Sei $x \in \ell^\infty$ und definiere $y := x - Lx$. Dann ist $y_n = x_n - x_{n+1}$ und damit $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n}(x_1 - x_{n+1})$, was wegen der Beschränktheit von (x_n) bereits $p(y) = 0$ und analog auch $p(-y) = 0$ zeigt. Also ist $\varphi(y) \leq p(y) = 0$ und $-\varphi(y) = \varphi(-y) \leq p(-y) = 0$, also $\varphi(x) - \varphi(Lx) = \varphi(y) = 0$. Weil $x \in \ell^\infty$ beliebig war, zeigt dies $\varphi = \varphi \circ L$.

(ii) Ist $x \geq 0$, so ist $-x \leq 0$ und nach den Regeln für den $\limsup$ damit auch $p(-x) \leq 0$. Also ist $-\varphi(x) = \varphi(-x) \leq p(-x) \leq 0$, was gerade $\varphi(x) \geq 0$ zeigt.

(iii) Die Normiertheit folgt aus $\varphi|_F = \psi$ und $\psi(\mathbf{1}) = 1$.

Also ist φ ein Banachlimes.

Um zu zeigen, dass es mehrere verschiedene Banachlimites gibt, muss man nur nachweisen, dass es eine Folge $z \in \ell^\infty$ mit $\alpha < \beta$ gibt. Dann kann man nämlich einmal $c = \alpha$ und einmal $c = \beta$ wählen und erhält zwei Banachlimites, die auf z nicht übereinstimmen. Definiere

$$z_n := \begin{cases} 1, & 2^{2k} \leq n < 2^{2k+1}, k \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & 2^{2k+1} \leq n < 2^{2k+2}, k \in \mathbb{N}_0, \end{cases}$$

also $z = (1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, \dots)$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} z_k = 1 - 2 + 4 - 8 \pm \cdots \pm 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k 2^k = \frac{(-2)^n - 1}{-3}$$

und daher

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - 1} \cdot \frac{(-2)^n - 1}{-3} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{2^{2n+1} - 1}{3(2^{2n+1} - 1)} = \frac{1}{3}$$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n z_k \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{2^n - 1} \cdot \frac{(-2)^n - 1}{-3} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{2^{2n} - 1}{-3(2^{2n} - 1)} = -\frac{1}{3}$$

Also hat die Folge z die gewünschte Eigenschaft; genauer gesagt gibt es zu jedem $c \in [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ einen Banachlimes φ_c mit $\varphi_c(z) = c$.

57. Sei X ein reeller normierter Raum, $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und konvex und $g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig und konkav, also $f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ und $g(\lambda x+(1-\lambda)y) \geq \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in X$. Zudem gelte $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in X$. Zeige, dass es dann eine stetige, affine Funktion $h\colon X \to \mathbb{R}$ mit $g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ für alle $x \in X$ gibt; affin bedeutet, dass $h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und $x, y \in X$ gilt. (4)

Tipp: Zeige zuerst, dass die Mengen $A := \{(x,t) : t > f(x)\}$ und $B := \{(x,t) : t < g(x)\}$ im normierten Raum $X \oplus \mathbb{R}$ offen und konvex sind!

Lösung: Man versieht $Y := X \oplus \mathbb{R}$ beispielsweise mit der Norm $\|(x,t)\|_Y := \|x\|_X + |t|$. Die Menge A ist als Urbild von $(0,\infty)$ unter der stetigen Abbildung $(x,t) \mapsto t - f(x)$ offen in Y. Seien nun (x,t) und (y,s) aus A beliebig, $\lambda \in [0,1]$. Dann ist

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) < \lambda t + (1-\lambda)s,$$

also nach Definition $\lambda(x,t)+(1-\lambda)(y,s)=(\lambda x+(1-\lambda)y,\lambda t+(1-\lambda)s)\in A$. Analog rechnet man nach, dass B offen und konvex ist. Wegen $f\geq g$ ist $A\cap B=\emptyset$. Nach dem Trennungssatz von Hahn-Banach gibt es ein $\varphi\in Y'$ mit $\varphi(x,t)<\varphi(y,s)$ für alle $(x,t)\in A$ und $(y,s)\in B$. Sei

$$\alpha:=\sup_{(x,t)\in A}\varphi(x,t)\leq\inf_{(y,s)\in B}\varphi(y,s).$$

und $c:=\varphi(0,1)$. Dann ist $c<0$, denn anderenfalls wäre wegen $f(0)\geq g(0)$

$$\varphi(0,f(0)+1)=(f(0)+1)c\geq(g(0)-1)c=\varphi(0,g(0)-1)$$

im Widerspruch zu obiger strikter Ungleichung, denn $(0,f(0)+1)\in A$ und $(0,g(0)-1)\in B$.

Definiere nun $h(x):=\frac{\varphi(x,0)-\alpha}{-c}$. Es ist klar, dass h stetig und affin ist, da φ stetig und linear ist. Es bleiben nur die Ungleichungen zu prüfen. Sei dazu $x\in X$. Wähle ein $t>f(x)$. Dann ist $(x,t)\in A$, also $\varphi(x,t)\leq\alpha$ und damit $h(x)=\frac{\varphi(x,t)-\alpha-\varphi(0,t)}{-c}\leq t$. Weil dies für jedes $t>f(x)$ richtig ist, folgt $h(x)\leq f(x)$. Wähle nun ein $s<g(x)$. Dann ist $(x,s)\in B$, also $\varphi(x,s)\geq\alpha$. Es ergibt sich wiederum $h(x)=\frac{\varphi(x,s)-\alpha-\varphi(0,s)}{-c}\geq s$, und daraus $h(x)\geq g(x)$. Also hat h alle gewünschten Eigenschaften.

Erläuterung: Die Formel für h findet man, indem man sich klarmacht, dass nach Wahl von φ und α die α-Stellen von φ eine trennende Hyperebene zwischen A und B bilden. Man will diese Hyperebene parametrisieren, sucht also zu jedem $x\in X$ das (eindeutig bestimmte) $h(x)$ mit der Eigenschaft $\varphi(x,h(x))=\alpha$. Dies findet man, indem man die Linearität $\varphi(x,h(x))=\varphi(x,0)+h(x)\varphi(0,1)$ ausnutzt und die Gleichung nach $h(x)$ auflöst.