UNIVERSITÄT ULM

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2008/09

Gesamt: 20 Punkte

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 15

58. Sei U ein Unterraum eines normierten Vektorraums X und $\varphi\colon U \to \mathbb{K}$ linear und stetig. Zeige, dass U genau dann dicht in X ist, wenn es genau eine stetige lineare Fortsetzung von φ auf X gibt! (2)

59. Sei X ein normierter Raum, U ein abgeschlossener Unterraum von X, V ein endlichdimensionaler Unterraum von X und $W := U + V$. Zeige:

(a) W ist ein abgeschlossener Unterraum von X. (2)

(b) Ist U projezierbar, so auch W. (2)

60. Sei $U := \{(x_k) \in \ell^2 : kx_{2k-1} = x_{2k}\ \forall k \in \mathbb{N}\}$ und $V := \{(x_k) \in \ell^2 : x_{2k-1} = 0\ \forall k \in \mathbb{N}\}$. Zeige:

(a) U und V sind abgeschlossene, projezierbare Unterräume von ℓ^2. (2)

(b) $U \cap V = \{0\}$ (1)

(c) Ist $x \in U \oplus V$, so ist $(kx_{2k-1}) \in \ell^2$. (1)

(d) $U \oplus V$ ist dicht in ℓ^2. (1)

(e) $U \oplus V$ ist nicht abgeschlossen. (1)

61. Sei X ein normierter Raum, $\varphi \in X'$ und $U := \operatorname{Kern} \varphi$. Zeige:

(a) Gibt es ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$, so gibt es zu jedem $x \in X$ ein $u \in U$ mit $\|x - u\| = \operatorname{dist}(x, U) = \inf_{v \in U} \|x - v\|$. (2)

(b) Gibt es ein $x \notin U$ und ein $u \in U$ mit $\|x - u\| = \operatorname{dist}(x, U)$, so existiert ein $y \in X$ mit $\|y\| = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$. (2)

(c) Sei $X = c_0$ und $\varphi(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$. Es gibt kein $y \in c_0$ mit $\|y\|_\infty = 1$ und $\varphi(y) = \|\varphi\|$. (2)

(d) Sei $X = L^1(0,1)$ und $\varphi(f) := \int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$. Es gibt kein $g \in L^1(0,1)$ mit $\|g\|_1 = 1$ und $\varphi(g) = \|\varphi\|$. (2)