Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 27

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 2

4. Sei V ein Hilbertraum, $\emptyset \neq K \subset V$ abgeschlossen und konvex, und sei P die orthogonale Projektion auf K. Zeige, dass P genau dann linear ist, wenn K ein Unterraum ist! (2)

5. *Trennungssatz:* Sei V ein Hilbertraum. Eine *Hyperebene* H von V ist ein abgeschlossener affiner Unterraum von Kodimension 1, d.h. es gibt $v_0 \in V$, einen abgeschlossenen Unterraum U von V und einen Vektor $v \in V$ mit $V = U \oplus \operatorname{span}\{v\}$ und $H = v_0 + U$. Zeige:

(a) Eine Menge $H \subset V$ ist genau dann eine Hyperebene von V, wenn es $p \in V$, $p \neq 0$, und $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $H = \{y \in V : (p \mid y) = \alpha\}$ gibt. (3)

(b) Ist H eine Hyperebene von V, so gibt es offene, disjunkte Mengen R_1 und R_2 mit $V = R_1 \cup H \cup R_2$, und man nennt R_1 und R_2 *zu H gehörenden Halbräume.* (1)

(c) Ist $K \subset V$ abgeschlossen und konvex und $x_0 \notin K$, so gibt es eine Hyperebene H mit zugehörigen Halbräumen R_1 und R_2, für die $x_0 \in R_1$ und $K \subset R_2$ gilt. (1)

(d) Sei $K \subset V$ abgeschlossen und konvex, $x_0 \notin K$, und Px_0 die orthogonale Projektion von x_0 auf K. Falls es genau eine Hyperebene $H = v_0 + U$ mit zugehörigem Halbraum R gibt, für die $Px_0 \in H$ und $K \subset \overline{R}$ gilt, also genau eine *Tangentialebene an K in Px_0*, so ist $x_0 - Px_0 \in U^\perp$. (2)

6. Sei X ein reeller Vektorraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Zeige:

(a) Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn ihr Epigraph, die Menge $\{(x, y) : y \geq f(x)\} \subset X \times \mathbb{R}$, konvex ist. (2)

(b) Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvex mit $a \leq f(x) \leq b$ für $x \in K$ und ist $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ konvex und monoton wachsend, so ist $g \circ f$ konvex. (2)

(c) Ist $f\colon K \to \mathbb{R}$ konvex und existiert $c := \min_{x \in K} f(x)$, so ist $\{x \in K : f(x) = c\}$ konvex. (1)

7. Sei X ein Banachraum, $K \subset X$ abgeschlossen und konvex. Eine Funktion $f\colon K \to \mathbb{R}$ heißt (schwach) unterhalb halbstetig, falls für $x_n \in K$ aus $x_n \to x$ ($x_n \rightharpoonup x$) $f(x) \leq \liminf f(x_n)$ folgt. Zeige:

(a) Ist K kompakt und f unterhalb halbstetig, so nimmt f ein globales Minimum an. (2)

(b) Ist X reflexiv, K beschränkt und f schwach unterhalb halbstetig, so nimmt f ein globales Minimum an. (2)

(c) Eine konvexe Funktion f ist genau dann unterhalb halbstetig, wenn sie schwach unterhalb halbstetig ist. (2)

8. *Bilinearformen:* Sei V ein normierter Raum und $a\colon V \times V \to \mathbb{R}$ bilinear. Zeige:

(a) a ist genau dann stetig, wenn es ein $c \geq 0$ mit $|a(u, v)| \leq c\|u\|\|v\|$ für alle $u, v \in V$ gibt. Ist a stetig, so bezeichnet $\|a\|$ das kleinste c mit dieser Eigenschaft. (2)

(b) Es gilt $\|a\| = \sup\{|a(u, v)| : \|u\| \leq 1, \|v\| \leq 1\}$. (2)

(c) Ist a positiv und symmetrisch, so ist $u \mapsto a(u) := a(u, u)$ konvex. (3)

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
`http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws09/fa2.html`