Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 3

9. Sei $X \neq \{0\}$ ein reflexiver Banachraum. Zeige:

(a) Ist $\varphi \in X'$, so gibt es ein $x \in X$ mit $\|x\| = 1$ und $\|\varphi\| = \varphi(x)$.

(b) Ist $C \subset X$ abgeschlossen und konvex und $x \in X$, so gibt es ein *Proximum* von x in C, also ein $x_0 \in C$ mit $\operatorname{dist}(x, C) = \|x - x_0\|$.

(c) Ist die Norm von X strikt konvex, d.h. $\|\lambda x + (1-\lambda)y\| < 1$ für $x \neq y$ mit $\|x\| = 1$, $\|y\| = 1$ und $0 < \lambda < 1$, so ist das Proximum eindeutig bestimmt, $P_C x := x_0$.

(d) Ist die Norm von X strikt konvex und U ein abgeschlossener Unterraum von X, so ist P_U im Allgemeinen trotzdem nicht linear.
Hinweis: Man darf ohne Beweis verwenden, dass die Norm von $L^p(\Omega)$, insbesondere also auch die Norm von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$, für $1 < p < \infty$ strikt konvex ist.

10. Sei c_0 der Banachraum der Nullfolgen versehen mit der Maximumsnorm. Dann ist die Abbildung $j\colon \ell^1 \to (c_0)', \langle j(x), y\rangle := \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ ein isometrischer Isomorphismus. In diesem Sinne schreibt man oft $(c_0)' = \ell^1$. Zeige:

(a) Ist $x \in \ell^1$, so nimmt x als Funktional genau dann ein Maximum auf $\{y \in c_0 : \|y\|_\infty \leq 1\}$ an, wenn x abbricht, es also ein n_0 mit $x_n = 0$ für $n \geq n_0$ gibt.

(b) Der Raum c_0 ist nicht reflexiv.

11. *Brouwer'scher Fixpunktsatz, allgemeine Fassung:* Sei $C \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen, beschränkt und konvex, und sei $f\colon C \to C$ stetig. Zeige, dass es ein $x \in C$ mit $f(x) = x$ gibt! Gib jeweils ein Beispiel, dass man die Forderungen „abgeschlossen“, „beschränkt“, „konvex“ und „stetig“ nicht ersatzlos streichen kann.
Hinweis: Der Brouwer'sche Fixpunktsatz für Kugeln darf verwendet werden.

12. Wie in der Vorlesung heißt eine Menge $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *monoton*, falls $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A$ gilt. Die Menge heißt *maximal monoton*, wenn es keine monotone echte Obermenge gibt. Zeige:

(a) Eine monotone Menge $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ist genau dann maximal monoton, wenn aus $(y_1 - y_2)(x_1 - x_2) \geq 0$ für alle $(x_1, y_1) \in A$ folgt, dass (x_2, y_2) in A liegt.

(b) Eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann monoton wachsend, wenn ihr Graph $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ eine monotone Menge ist.

(c) Ist $A \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ monoton, so gibt es eine maximal monotone Obermenge von A.

(d) Zu einer monoton wachsenden Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ mit einer Menge $I \subset \mathbb{R}$ gibt es im Allgemeinen keine Fortsetzung, deren Graph maximal monoton ist.

13. Seien X und Y Banachräume und $T \in \mathscr{L}(X, Y)$. Zeige:

(a) Es gibt genau ein $T' \in \mathscr{L}(Y', X')$ mit $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y'\rangle$ für $x \in X$ und $y \in Y'$.

(b) Es gilt $\|T\| = \|T'\|$.

(c) Der Operator T ist genau dann bijektiv, wenn T' bijektiv ist.

Übungsblätter sowie aktuelle Informationen unter
http://www.uni-ulm.de/mawi/iaa/courses/ws09/fa2.html