Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

# Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 4

**14.** Seien $1 \le p, q, r < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ gegeben. Zeige: Die punktweise Multiplikation

$$L^p(\Omega) \times L^q(\Omega) \to L^r(\Omega),\ (f, g) \mapsto f \cdot g$$

ist wohldefiniert und stetig.

**Lösung:** Da $s := p/r$ und $t := q/r$ nach Voraussetzung konjugierte Indizes sind, ist

$$\int |fg|^r \le \Big(\int |f|^{rs}\Big)^{1/s}\Big(\int |g|^{rt}\Big)^{1/t} = \Big(\int |f|^p\Big)^{r/p}\Big(\int |g|^q\Big)^{r/q}.$$

Also ist für $f \in L^p$ und $g \in L^q$ tatsächlich $fg \in L^r$ und man hat $\|fg\|_r \le \|f\|_p \|g\|_q$. Die Stetigkeit zeigt man wie für beschränkte Bilinearformen.

**15.** Sei $1 \le p < \infty$. Zeige: Die Abbildungen $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ und $u \mapsto |u|$ sind Lipschitz-stetig in $L^p(\Omega)$. Sind sie auch stets Lipschitz-stetig in $W^{1,p}(\Omega)$?

**Lösung:** Durch Fallunterscheidung zeigt man $|x^+ - y^+| \le |x - y|$ leicht für reelle Zahlen. Also ist

$$\|u^+ - v^+\|_p^p = \int |u^+ - v^+|^p \le \int |u - v|^p = \|u - v\|_p^p.$$

Also ist $u \mapsto u^+$ Lipschitz-stetig in $L^p(\Omega)$. Wegen $u^- = (-u)^+$ und $|u| = u^+ + u^-$ sind auch die anderen beiden Abbildungen Lipschitz-stetig.

Wir zeigen, dass die Operationen auf $W^{1,p}(0,1)$ nicht Lipschitz-stetig ist. Betrachte dazu nicht-negative Funktionen $u_n \in \mathrm{C}^\infty[0,1]$ mit $\|u_n\|_\infty \to 0$ und $\|u_n'\|_p \to \infty$, beispielsweise stückweise lineare Funktionen. Sei $v_n := u_n - \|u_n\|_\infty$. Dann ist $v_n' = u_n'$ und daher

$$\|u_n - v_n\|_{W^{1,p}(0,1)} = \|u_n - v_n\|_{L^p(0,1)} = \|u_n\|_\infty \to 0.$$

Andererseits ist aber $v_n^+ = 0$, also

$$\|u_n^+ - v_n^+\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u_n^+\|_{W^{1,p}(\Omega)} \ge \|u_n'\|_{L^p(\Omega)} \to \infty.$$

Dies zeigt, dass $u \mapsto u^+$ nicht einmal gleichmäßig stetig auf der Einheitskugel von $W^{1,p}(0,1)$ ist. Wegen $2u^+ = |u| + u$ und $u^+ = u + u^-$ können dann auch die anderen beiden Abbildungen nicht gleichmäßig stetig sein.

**16.** Sei $1 \le p < \infty$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^N$.

(a) Sei $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und gelte $u(x) \in \mathbb{Q}$ fast überall. Dann ist $\nabla u = 0$.
**Bemerkung:** In diesem Fall besitzt $u$ einen auf Zusammenhangskomponenten von $\Omega$ konstanten Repräsentanten.

**Lösung:** Sei $N := \{\nabla u \ne 0\}$, $A_q := \{u = q\}$. Nach dem Lemma von Stampacchia ist $N_q := N \cap A_q$ für jedes $q$ eine Nullmenge. Da $\Omega$ die Vereinigung abzählbar vieler $A_q$ ist, ist $N = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} N_q$ eine Nullmenge, also $\nabla u(x) = 0$ für fast alle $x$.

(b) Zeige, dass die Funktion $u := \mathbb{1}_{B(0,1)}$ nicht in $W^{1,p}(B(0,2))$ liegt!

**Lösung:** Wegen $u(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x$ müsste im Fall $u \in W^{1,p}(B(0,2))$ die Funktion $u$ auf der zusammenhängenden Menge $B(0,2)$ fast überall konstant sein, was aber offenbar nicht der Fall ist.

**17.** Sei $1 < p < \infty$. Zeige: Der Operator $\Delta_p \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)'$ ist stetig.

**Lösung:** Sei $u_n \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Wir zeigen, dass $|\nabla u_n|^{p-2} D_j u_n$ dann in $L^{p'}(\Omega)$ gegen $|\nabla u|^{p-2} D_j u$ konvergiert. Nach der Umkehrung von Lebesgue gibt es nämlich nach Teilfolgenbildung ein $h \in L^p(\Omega)$ mit $|D_i u_n| \le h$ und es gilt $D_j u_n \to D_j u$ fast überall. Insbesondere ist $|\nabla u| \le \sqrt{N} h$, und somit ist $|\nabla u|^{p-2} |D_j u_n| \le N^{(p-2)/2} h^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$. Also folgt aus dem Satz von Lebesgue die Zwischenbehauptung. Folglich ist

$$
\begin{aligned}
\|\Delta_p u_n - \Delta_p u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)'} &= \sup_{\|v\| \le 1} \int_\Omega \big(|\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{p-2} \nabla u\big) \nabla v \\
&\le \sup_{\|v\| \le 1} \sum_{j=1}^N \big\| |\nabla u_n|^{p-2} D_j u_n - |\nabla u|^{p-2} D_j u \big\|_{L^{p'}(\Omega)} \|D_j v\|_{L^p(\Omega)} \\
&\le \sum_{j=1}^N \big\| |\nabla u_n|^{p-2} D_j u_n - |\nabla u|^{p-2} D_j u \big\|_{L^{p'}(\Omega)} \to 0.
\end{aligned}
$$

Dies ist gerade die Stetigkeit von $\Delta_p$.

**18.** Sei $1 < p < \infty$, $F \in W^{1,p}(\Omega)'$. Zeige, dass es $f, f_j \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$
\langle F, u \rangle = \int_\Omega f u + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j D_j u
$$

gibt! Sind diese Funktionen eindeutig bestimmt?

**Lösung:** Wir identifizieren $W^{1,p}(\Omega)$ wie in der Vorlesung mit einem abgeschlossenen Teilraum von $L^p(\Omega)^{N+1}$ und letzteren Raum in der offensichtlichen Weise mit $L^p(\Omega_{N+1})$, wobei $\Omega_{N+1}$ als Maßraum eine disjunkte Vereinigung von $N+1$ Kopien von $\Omega$ sei.

Ist nun $F \in W^{1,p}(\Omega)'$, so gibt es nach dem Satz von Hahn-Banach ein stetiges Funktional $\varphi$ auf $L^p(\Omega)^{N+1}$, das $F$ fortsetzt, also mit der obigen Identifikation

$$
\varphi(u, D_1 u, \dots, D_N u) = F(u)
$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Wegen $L^p(\Omega_{N+1})' = L^{p'}(\Omega_{N+1})$ gibt es Funktionen $f \in L^{p'}(\Omega)$ und $f_j \in L^{p'}(\Omega)$ mit

$$
\varphi(u, v_1, \dots, v_N) = \int_\Omega f u + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j v_j.
$$

für alle $u, v_1, \dots, v_N \in L^p(\Omega)$. Insbesondere zeigt dies die gewünschte Identität.

Um zu sehen, dass die $f$, $f_j$ nicht eindeutig bestimmt sind, wähle eine beliebige Testfunktion $f_1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, $f := 0$, $f_j := 0$ für alle $j \ne 1$, $g := -D_1 f_1$, und $g_j := 0$ für alle $j$. Dann ist nach Definition der schwachen Ableitung

$$
\int_\Omega f u + \sum_{j=1}^N \int_\Omega f_j D_j u = \int_\Omega f_1 D_1 u = -\int_\Omega D_1 f_1 u = \int_\Omega g u
$$

für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Daher stellen $(f, f_1, \dots, f_N)$ und $(g, g_1, \dots, g_N)$ dasselbe Funktional auf $W^{1,p}(\Omega)$ dar.

**Bemerkung:** Genauso zeigt man, dass alle Funktionale auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ von dieser Form sind. Man kann auch obiges Argument insofern ergänzen, dass man beobachtet, dass jedes Funktional auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ eine Fortsetzung zu einem Funktional auf $W^{1,p}(\Omega)$ hat und wir die Gestalt dieser Funktionale bereits kennen.

**19.** Sei $1 < p < \infty$, $\Delta_p^N \colon W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)'$ definiert durch

$$\big\langle \Delta_p^N u, v \big\rangle := -\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v.$$

Zeige: Zu jedem $f \in L^{p'}(\Omega)$ gibt es genau ein $u \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $|u|^{p-2}u - \Delta_p^N u = f$.
**Hinweis:** Da der Beweis, dass $u \mapsto |u|^{p-2}u - \Delta_p^N$ stetig ist, genau wie für Aufgabe 17 geführt werden kann, braucht dies hier nicht nochmals ausgeführt zu werden.

**Lösung:** Die Wohldefiniertheit des Operators sieht man wie für $\Delta_p$ in der Vorlesung. Es genügt zu zeigen, dass $u \mapsto |u|^{p-2}u - \Delta_p^N$ demistetig, strikt monoton und koerziv ist. Die Stetigkeit muss laut Hinweis nicht mehr untersucht werden. Für die Monotonie beobachtet man, dass mit dem gleichen Beweis wie in der Vorlesung stets

$$\big\langle (-\Delta_p^N u) - (-\Delta_p^N v), u - v \big\rangle \geq 0$$

gilt. Also ist

$$\begin{aligned}\big\langle (|u|^{p-2}u - \Delta_p^N u) - (|v|^{p-2}v - \Delta_p^N v), u - v \big\rangle &\geq \big\langle |u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v, u - v \big\rangle \\ &= \int_\Omega (|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v) \geq 0,\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung laut Vorlesung unter dem Integral punktweise gilt; genauer gilt aber in der letzten Ungleichung nur dann Gleichheit, wenn $u = v$ fast überall richtig ist. Also ist der Operator strikt monoton. Für die Koerzivität beachte man schließlich noch

$$\big\langle |u|^{p-2}u - \Delta_p^N u, u \big\rangle = \int_\Omega |u|^p + \int_\Omega |\nabla u|^p = \|u\|^p_{W^{1,p}(\Omega)},$$

was wegen $p > 1$ die Koerzivitätsbedingung impliziert.