Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 17.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 5

20. Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein Unterraum von X, und sei $A\colon D(A) \to X$ linear. Zeige:

(a) Der Vektorraum $D(A)$ mit der Norm $\|x\|_A := \|x\| + \|Ax\|$ ist genau dann vollständig, wenn A abgeschlossen ist.
Bemerkung: Die Norm $\|\cdot\|_A$ heißt *Graphennorm bezüglich* A.

(b) Sei A bijektiv. Der Operator $A^{-1}\colon X \to X$ ist genau dann stetig, wenn A abgeschlossen ist.

(c) Sei A abgeschlossen und $D(A)$ dicht in X. Dann ist A genau dann stetig, wenn $D(A) = X$ ist.

21. Sei X ein Banachraum, $D(A)$ ein Unterraum von X, $A\colon D(A) \to X$ linear, und sei $T \in \mathscr{L}(X)$. Zeige:

(a) Der Operator $T - A$ mit Definitionsbereich $D(T - A) := D(A)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn A abgeschlossen ist.

(b) Ist $\|T\| < 1$, so ist $I - T$ invertierbar.

(c) Die Resolventenmenge $\varrho(A) \subset \mathbb{R}$ ist offen.

22. Sei $(T(t))_{t\ge 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X und A ihr Generator. Es gelte $\limsup_{t\to 0} \|T(t) - I\| < 1$. Zeige:

(a) $\lim_{t\to 0} T(t) = I$ in $\mathscr{L}(X)$.
Tipp: Man kann die Identität $2(T(t) - I) = T(2t) - I - (T(t) - I)^2$ ausnutzen.

(b) Es gibt $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ mit $(\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda t}\, T(t)\mathrm{d}t$ für $\lambda > \lambda_0$.
Hinweis: Inbesondere ist zu zeigen, dass dieses Integral existiert.

(c) $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda(\lambda - A)^{-1} = I$ in $\mathscr{L}(X)$.

(d) A ist beschränkt und es gilt $D(A) = X$.

23. Sei X ein reflexiver Banachraum. Dann gibt es zu jedem $x'' \in X''$ genau ein $x \in X$ mit $\langle x'', x'\rangle = \langle x', x\rangle$ für alle $x' \in X'$. Sei $T\colon [0, \infty) \to \mathscr{L}(X)$ eine Funktion, $T(0) = I$ und $T(t)T(s) = T(t + s)$ für alle $s, t > 0$. Für jedes $x \in X$ und $x' \in X'$ sei $t \mapsto \langle x', T(t)x\rangle$ auf $[0, \infty)$ stetig. Zeige:

(a) Es gibt ein $M \ge 1$ und ein $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \le M\,\mathrm{e}^{\omega t}$ für alle $t \ge 0$.

(b) Zu jedem $r > 0$ und $x \in X$ gibt es genau ein $x_r \in X$ mit $\langle x', x_r\rangle = \frac{1}{r}\int_0^r \langle x', T(t)x\rangle\,\mathrm{d}t$.
Bemerkung: Dies ist sogar für nicht-reflexive X richtig.

(c) Der lineare Aufspann der Menge $\{x_r : r > 0,\ x \in X\}$ ist dicht in X.

(d) Für alle $x \in X$ und $r > 0$ gilt $\lim_{t\to 0} T(t)x_r = x_r$ in X.

(e) Die Familie $(T(t))_{t\ge 0}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf X.