Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 6

24. Sei $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf einem Banachraum X mit Generator B. Zeige:

(a) Die Einschränkung $(S_1(t))_{t\geq 0} := (S(t)|_{D(B)})_{t\geq 0}$ ist eine C_0-Halbgruppe auf $D(B)$ bezüglich der Graphennorm.

Lösung: Laut Vorlesung lässt $S(t)$ den Raum $D(B)$ invariant. Die Halbgruppengleichung vererbt sich natürlich auf die Einschränkung. Für die starke Stetigkeit ist nur noch zu zeigen, dass $BS(t)x$ für $t \to 0$ in X gegen Bx konvergiert, da $\lim_{t\to 0} S(t)x = x$ in X bereits klar ist. Dies folgt aber aus $BS(t)x = S(t)Bx$ und der starken Stetigkeit von S in X.

(b) Der Generator B_1 von S_1 erfüllt $D(B_1) = D(B^2)$ und $B_1x = Bx$ für $x \in D(B_1)$.

Lösung: Ist $x \in D(B^2)$, also $Bx \in D(B)$, so gilt

$$\frac{BS(t)x - Bx}{t} = \frac{S(t)Bx - Bx}{t} \to B^2x = B(Bx)$$

für $t \to 0$, was $D(B^2) \subset D(B_1)$ und $B_1x = Bx$ zeigt, denn $\frac{S(t)x-x}{t} \to Bx$ ist für $x \in D(B^2)$ klar.

Ist umgekehrt $x \in D(B_1)$, so konvergiert insbesondere $\frac{BS(t)x-Bx}{t} = \frac{S(t)Bx-Bx}{t}$ für $t \to 0$, was $Bx \in D(B)$, also $x \in D(B^2)$ zeigt. Somit ist $D(B_1) = D(B^2)$.

(c) Der Unterraum $D(B^2)$ ist dicht in X.

Lösung: Als Definitionsbereich eines Generators ist $D(B_1)$ dicht in $D(B)$ versehen mit der Graphennorm. Insbesondere ist $D(B^2)$ dicht in $D(B)$ bezüglich der Norm von X. Weil aber $D(B)$ dicht in X ist, folgt, dass $D(B^2)$ ebenfalls dicht in X ist.

25. Seien V und H Hilberträume, $V \hookrightarrow_d H$, a eine bilineare, stetige, H-elliptische Form auf V, $A \sim a$, und $(S(t))_{t\geq 0}$ die von $-A$ erzeugte Halbgruppe.

(a) Es gilt $D(A) \hookrightarrow V$, wobei $D(A)$ mit der Graphennorm versehen sei.

Lösung: Für $u \in D(A)$ ist nach Definition $u \in V$ und es gilt

$$\begin{aligned}\alpha\|u\|_V^2 &\leq \omega\|u\|_H^2 + a(u,u) = \omega\|u\|_H^2 + (Au \mid u)_H \\ &\leq \omega\|u\|_H^2 + \|Au\|_H\|u\|_H \leq c(\omega\|u\|_H + \|Au\|_H)\|u\|_V,\end{aligned}$$

wobei c die Einbettungskonstante von V in H bezeichnet. Also ist

$$\|u\|_V \leq \frac{c(\omega+1)}{\alpha}(\|u\|_H + \|Au\|_H) = \frac{c(\omega+1)}{\alpha}\|u\|_{D(A)},$$

was $D(A) \hookrightarrow V$ zeigt.

(b) Ist $u_0 \in D(A^2)$, so ist $S(\cdot)u_0 \in \mathrm{C}^1([0,\infty);V)$.

Lösung: Sei $u_0 \in D(A^2)$. Nach der vorigen Aufgabe definiert $u(t) := S(t)u_0$ eine Funktion in $\mathrm{C}^1([0,\infty);D(A))$. Weil die Einbettung $\iota\colon D(A) \to V$ nach dem vorigen Aufgabenteil stetig ist, folgt aus Aufgabe 3 (b) die Differenzierbarkeit von $u\colon [0,\infty) \to V$ mit der gleichen Ableitung wie als Funktion $u\colon [0,\infty) \to D(A)$. Weil u' sogar stetig mit Werten in $D(A)$ ist, ist u als Funktion mit Werten in V stetig differenzierbar.

26. (a) Sei $\mathrm{C}_{2\pi}$ der Raum der 2π-periodischen stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm, und sei $(S(t)f)(x) := f(x+t)$. Zeige, dass $(S(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $\mathrm{C}_{2\pi}$ ist und bestimme ihren Generator!

Lösung: Die Invarianz von $\mathrm{C}_{2\pi}$, die Stetigkeit des Operators und das Halbgruppengesetz sind offensichtlich. Für die starke Stetigkeit muss man nur beobachten, dass jede Funktion $f \in \mathrm{C}_{2\pi}$ gleichmäßig stetig ist.

Bezeichne B den Generator von S. Wir zeigen $D(B) = \mathrm{C}^1_{2\pi}$ und $Bf = f'$. Sei zuerst $f \in \mathrm{C}^1_{2\pi}$. Dann ist $S(\cdot)f'$ stetig und daher Riemann-integierbar in $\mathrm{C}_{2\pi}$ und es gilt

$$\int_0^t (S(s)f')(x)\mathrm{d}s = \int_0^t f'(x+s)\mathrm{d}s = f(x+t) - f(x)$$

für jedes feste $x \in \mathbb{R}$. Also muss $\int_0^t S(s)f' = S(t)f - f$ gelten, was nach der Allerweltsformel $f \in D(B)$ und $Bf = f'$ zeigt.

Ist nun umgekehrt $f \in D(B)$, so konvergiert

$$\frac{(S(t)f)(x) - f(x)}{t} = \frac{f(x+t) - f(x)}{t}$$

für $t \to 0$ (sogar gleichmäßig in x) gegen eine stetige Funktion, die dann natürlich f' ist. Also ist $f \in \mathrm{C}^1_{2\pi}$ und $Bf = f'$.

Bemerkung: Man kann die Verwendung der Allerweltsformel auch umgehen. Um die gleichmäßige Konvergenz der Differenzenquotienten zu zeigen, kann man auch mit dem Mittelwertsatz und der gleichmäßigen Stetigkeit von f' argumentieren.

(b) Sei Ω ein σ-endlicher Maßraum und $m\colon \Omega \to \mathbb{R}$ eine nach oben beschränkte messbare Funktion. Zeige, dass $(S(t)u)(x) := \mathrm{e}^{tm(x)}\, u(x)$ für $1 \leq p < \infty$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(\Omega)$ definiert und bestimme ihren Generator!

Lösung: Die Invarianz von $L^p(\Omega)$ und die Stetigkeit des Operators folgen aus der Tatsache, dass e^{tm} für $t \geq 0$ beschränkt ist. Das Halbgruppengesetz folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion. Die starke Stetigkeit der Halbgruppe sieht man mittels des Satzes von Lebesgue.

Sei B der Generator von S. Wir zeigen $D(B) = \{u \in L^p(\Omega) : mu \in L^p(\Omega)\}$ und $Bu = mu$. Sei dazu $u \in D(B)$. Dann konvergiert

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{\mathrm{e}^{tm}\, u - u}{t} = \frac{\mathrm{e}^{tm} - 1}{t} u$$

für $t \to 0$ in $L^p(\Omega)$ und daher nach Teilfolge fast überall gegen Bu. Offenbar konvergiert der Ausdruck aber punktweise gegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{e}^{tm}\big|_{t=0} = m$. Also gilt $Bu = mu$ und insbesondere $mu \in L^p(\Omega)$.

Sei nun umgekehrt $u \in L^p(\Omega)$ und $mu \in L^p(\Omega)$. Dann konvergiert

$$\frac{S(t)u - u}{t} = \frac{\mathrm{e}^{mt} - 1}{t} u = \mathrm{e}^{\xi m}\, mu, \quad \xi = \xi(x,t) \in (0,t)$$

überall gegen mu und ist für $t \leq 1$ dominiert durch $(1 + \mathrm{e}^m)mu \in L^p(\Omega)$. Also konvergiert nach dem Satz von Lebesgue $\frac{S(t)u - u}{t}$ in $L^p(\Omega)$ gegen mu, was $u \in D(B)$ und $Bu = m$ zeigt.

27. Sei X ein separabler Banachraum und $f\colon [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar. Zeige, dass f auch (Bocher-)integrierbar ist und die beiden Integrale übereinstimmen!

Hinweis: Man darf verwenden, dass jede skalarwertige Riemann-integrierbare Funktion Lebesgue-integrierbar ist und die Integrale übereinstimmen.

Lösung: Sei $f\colon [a,b] \to X$ Riemann-integrierbar. Dann ist $\langle x', f(\cdot)\rangle$ nach Aufgabe 2 (b) für jedes $x' \in X'$ Riemann-integrierbar und daher laut Hinweis messbar. Zudem ist f

beschränkt, wie man mit den gleichen Methoden wie in Analysis 1 sehen kann, also $\|f(\cdot)\| \in L^\infty(a,b)$. Nach Definition ist f somit integrierbar. Zudem gilt laut Hinweis

$$\left\langle x', \int_a^b f \right\rangle = \int_a^b \langle x', f\rangle = \int_{[a,b]} \langle x', f\rangle$$

für das Riemann-Integral $\int_a^b$ und das Lebesgue-Integral $\int_{[a,b]}$, was zeigt, dass das Riemann-Integral die definierende Eigenschaft des Bochner-Integrals erfüllt.

28. Sei H ein separabler Hilbertraum und $(e_n)_{n=0}^\infty$ eine Orthonormalbasis von H. Definiere $f(t) := \frac{2^{n+1}}{n+1} e_n$ für $t \in (2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ und $f(0) := 0$. Zeige, dass es ein $y \in H$ mit $\langle x', y\rangle = \int_0^1 \langle x', f(t)\rangle \,\mathrm{d}t$ für alle $x' \in H'$ gibt; insbesondere ist zu zeigen, dass $\langle x', f(\cdot)\rangle$ Lebesgue-integrierbar ist. Ist f Bochner-integrierbar?

Lösung: Weil $(\frac{1}{n+1})$ in ℓ^2 liegt, konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty \frac{e_n}{n+1}$. Es bezeichne y den Grenzwert.

Wir zeigen zuerst, dass $(x \mid f(\cdot))$ für jedes $x \in H$ in $L^1(0,1)$ liegt. Die Messbarkeit ist offensichtlich. Für die Integrierbarkeit schreiben wir $x = \sum_{m=0}^\infty x_m e_m$ und berechnen

$$\int_0^1 \big|(x \mid f(t))\big| \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}|x_n|}{n+1} \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^\infty \frac{|x_n|}{n+1} \le \left(\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{1/2} \|x\| < \infty.$$

Nun gilt

$$(x \mid y) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(x \mid e_n)}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}\,(x \mid e_n)}{n+1} \mathrm{d}t = \int_0^1 (x \mid f(t))\,\mathrm{d}t$$

für alle $x \in H$. Andererseits ist aber

$$\int_0^1 \|f(t)\| = \sum_{n=0}^\infty \int_{2^{-(n+1)}}^{2^{-n}} \frac{2^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} = \infty,$$

also f nicht integrierbar.

Bemerkung: Gibt es ein y wie in der Aufgabenstellung, so nennt man f *schwach integrierbar* oder *Pettis-integrierbar*. Jede Bocher-integrierbare Funktion ist Pettis-integrierbar (für reflexive Räume wurde dies in der Vorlesung bewiesen). Andererseits gibt es in jedem unendlich-dimensionalen Banachraum Pettis-integrierbare Funktionen, die nicht Bochner-integrierbar sind. Für Hilberträume wurde dies hier bewiesen. Für allgemeine Banachräume kann man ähnlich vorgehen, benutzt dann aber den Satz von Dvoretzky-Rogers, der die Existenz einer unbedingt konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihe mit Wert y garantiert. Definiert man f ähnlich wie oben, sieht man, dass $\|f(\cdot)\|$ nicht integrierbar ist, andererseits aber $\langle x', f(\cdot)\rangle$ integrierbar ist und den Integralwert $\langle x', y\rangle$ hat, da die zugehörige Reihe in $\mathbb{R}$ unbedingt (und damit absolut) konvergiert.