Universität Ulm

Besprechung: Dienstag, 15.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Übungen Funktionalanalysis 2: Blatt 8

34. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $\alpha > 0$ und $m \colon \Omega \to [\alpha, \infty)$ messbar. Wir schreiben $V := L^2(\Omega, m\,\mathrm{d}\mu)$ und $H := L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$. Zeige:

(a) $V \hookrightarrow_d H$.

(b) Jede Funktion g in $L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ definiert mittels $\langle \varphi_g, v \rangle_{V',V} := \int_\Omega gv\mathrm{d}\mu$ ein Funktional $\varphi_g \in V'$ und es gilt $\|\varphi_g\|_{V'} = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})}$.

(c) Zu jedem $\varphi \in V'$ existiert genau ein $g \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ mit $\varphi = \varphi_g$.

(d) Ist $m \in L^\infty(\Omega)$, so ist $V = H$.

Bemerkung: Beachte, dass für $u \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ und $v \in L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ nach Definition

$$\langle u, v \rangle_{V',V} = (u \mid v)_H$$

gilt. Man identifiziert also V' mittels des Skalarprodukts von H mit $L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$. In diesem Sinne ist der Gelfand-Dreier

$$V \hookrightarrow_d H \cong H' \hookrightarrow_d V'$$

als

$$L^2(\Omega, m\,\mathrm{d}\mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$$

zu lesen.

35. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass für $x, y \in X$ aus $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$ folgt, dass $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1 - \delta$ gilt. Zeige:

(a) Ist X gleichmäßig konvex, so ist X auch strikt konvex, vgl. Aufgabe 9.

(b) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.

36. Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige:

(a) $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

(b) Sei X gleichmäßig konvex. Gilt $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$, so konvergiert (x_n) sogar in Norm gegen x.

37. Sei H ein Hilbertraum und $\mathscr{O}$ die Menge aller (mehrwertigen) Operatoren auf H, wobei $D(A) = \emptyset$ für $A \in \mathscr{O}$ zugelassen sei. Wir versehen $\mathscr{O}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus der Vorlesung. Sei $\mathscr{A}$ die Menge der akkretiven Operatoren in $\mathscr{O}$ und $\mathscr{M}$ die Menge der m-akkretiven Operatoren in $\mathscr{A}$.

(a) Welche der Mengen $\mathscr{O}$, $\mathscr{A}$ und $\mathscr{M}$ sind Vektorräume?

(b) Welche der Mengen $\mathscr{O}$, $\mathscr{A}$ und $\mathscr{M}$ sind Kegel, enthalten also zu je zwei Elementen auch deren Summe und zu jedem Element auch die nicht-negativen Vielfachen?

(c) Gilt $\mathscr{M} + \mathscr{A} \subset \mathscr{M}$?

38. Sei H ein Hilbertraum und A m-akkretiv. Sei $T: H \to H$ akkretiv und Lipschitz-stetig. Zeige, dass $A + T$ ein m-akkretiver Operator ist!