Universität Ulm
Dienstag, 15.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10

Lösungen Funktionalanalysis 2: Blatt 8

34. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, $\alpha > 0$ und $m \colon \Omega \to [\alpha, \infty)$ messbar. Wir schreiben $V := L^2(\Omega, m\,\mathrm{d}\mu)$ und $H := L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$. Zeige:

(a) $V \hookrightarrow_d H$.

Lösung: Für $u \in V$ ist

$$\int_\Omega u^2 \mathrm{d}\mu \le \frac{1}{\alpha} \int_\Omega m u^2 \mathrm{d}\mu,$$

was $V \subset H$ und sogar $\|u\|_H^2 \le \frac{1}{\alpha}\|u\|_V^2$ zeigt, also $V \hookrightarrow H$.
Sei $u \in H$ beliebig, $u_n := u\,\mathbb{1}_{\{m \le n\}}$. Dann ist $u_n \in V$, $|u_n| \le |u|$, und nach dem Satz von Lebesgue konvergiert daher u_n in H gegen u. Also ist V dicht in H.

(b) Jede Funktion g in $L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ definiert mittels $\langle \varphi_g, v\rangle_{V',V} := \int_\Omega g v \mathrm{d}\mu$ ein Funktional $\varphi_g \in V'$ und es gilt $\|\varphi_g\|_{V'} = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})}$.

Lösung: Sei $g \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$. Dann ist nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\int_\Omega g v \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \frac{g}{\sqrt{m}} \sqrt{m} v \mathrm{d}\mu \le \Big(\int_\Omega \frac{g^2}{m} \mathrm{d}\mu\Big)^{1/2} \Big(\int_\Omega v^2 m \mathrm{d}\mu\Big)^{1/2} = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})} \|v\|_V.$$

Also ist φ_g wohldefiniert, offenbar linear, und es gilt $\|\varphi_g\| \le \|g\|$.
Setzt man hingegen konkret $v := \frac{g}{m}$, so ist

$$\int_\Omega v^2 m \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \frac{g^2}{m} \mathrm{d}\mu = \|g\|^2_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})},$$

also $v \in V$ mit $\|v\|_V = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})}$, und somit

$$\langle \varphi_g, v\rangle = \int_\Omega \frac{g^2}{m} \mathrm{d}\mu = \|g\|^2_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})} = \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})} \|v\|_V,$$

was $\|\varphi_g\| \ge \|g\|_{L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})}$ zeigt.

(c) Zu jedem $\varphi \in V'$ existiert genau ein $g \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ mit $\varphi = \varphi_g$.

Lösung: Sei $\varphi \in V'$. Da V ein Hilbertraum ist, gibt es nach dem Satz von Riesz-Fréchet ein $h \in V$ mit

$$\langle \varphi, v\rangle = (h \mid v)_V = \int_\Omega h v \, m \, \mathrm{d}\mu$$

für alle $v \in V$. Definiere $g := mh$. Dann ist

$$\int_\Omega g^2 \frac{\mathrm{d}\mu}{m} = \int_\Omega m h^2 \mathrm{d}\mu = \|h\|_V^2,$$

also $g \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$. Nach Konstruktion ist $\varphi_g = \varphi$. Dies zeigt die Existenz.
Da nach dem vorigen Aufgabenteil die Abbildung $g \mapsto \varphi_g$ von V nach $L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ isometrisch ist, ist sie insbesondere injektiv, was die Eindeutigkeit zeigt.

(d) Ist $m \in L^\infty(\Omega)$, so ist $V = H$.

Lösung: Ist M eine obere Schranke von m, so ist

$$\alpha \int_\Omega u^2 \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega m u^2 \mathrm{d}\mu \le M \int_\Omega u^2 \mathrm{d}\mu.$$

Also ist $\int_\Omega u^2 \mathrm{d}\mu$ genau dann endlich, wenn $\int_\Omega m u^2 \mathrm{d}\mu$ endlich ist, was $V = H$ zeigt.

Bemerkung: Beachte, dass für $u \in L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$ und $v \in L^2(\Omega, \mathrm{d}\mu)$ nach Definition

$$\langle u, v \rangle_{V',V} = (u \mid v)_H$$

gilt. Man identifiziert also V' mittels des Skalarprodukts von H mit $L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$. In diesem Sinne ist der Gelfand-Dreier

$$V \hookrightarrow_d H \cong H' \hookrightarrow_d V'$$

als

$$L^2(\Omega, m\,\mathrm{d}\mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \mu) \hookrightarrow_d L^2(\Omega, \frac{\mathrm{d}\mu}{m})$$

zu lesen.

35. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft gibt, dass für $x, y \in X$ aus $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$ folgt, dass $\|\frac{x+y}{2}\| \le 1 - \delta$ gilt. Zeige:

(a) Ist X gleichmäßig konvex, so ist X auch strikt konvex, vgl. Aufgabe 9.

Lösung: Seien $x \ne y$ aus X mit $\|x\| = \|y\| = 1$, und sei $0 < \lambda < 1$. Wir müssen $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < 1$ zeigen. Ohne Einschränkung sei $\lambda \le \frac{1}{2}$. Dann gibt es ein $\tilde{x} \ne y$ auf der Verbindungsstrecke von x und y mit

$$\lambda x + (1-\lambda) y = \frac{\tilde{x} + y}{2},$$

nämlich $\tilde{x} := 2\lambda x + (1 - 2\lambda) y$. Sei nun $\varepsilon := \|y - \tilde{x}\|$ und $\delta > 0$ wie in der Definition der gleichmäßigen Konvexität. Dann ist nach Definition

$$\|\lambda x + (1-\lambda) y\| = \|\tfrac{\tilde{x}+y}{2}\| \le 1 - \delta < 1,$$

was zu zeigen war.

(b) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex.

Lösung: Zu $\varepsilon > 0$ wähle $\delta > 0$ mit $(1-\delta)^2 \ge 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$. Nach der Parallelogrammgleichung ist für x und y in H mit $\|x\| \le 1$, $\|y\| \le 1$ und $\|x - y\| \ge \varepsilon$

$$\|x + y\|^2 + \varepsilon^2 \le \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \le 4,$$

also

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \le 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \le (1-\delta)^2,$$

was gerade die Behauptung zeigt.

36. Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige:

(a) $\|x\| \le \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Lösung: Sei $r > s := \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$. Die abgeschlossene Kugel $\overline{B}(0, r)$ ist abgeschlossen und konvex, also schwach abgeschlossen. Nach Voraussetzung gibt es eine Teilfolge (x_{n_k}) mit $x_{n_k} \in \overline{B}(0, r)$ für alle k. Wegen $x_{n_k} \rightharpoonup x$ folgt $x \in \overline{B}(0, r)$, also $\|x\| \le r$. Weil $r > s$ beliebig war, zeigt dies $\|x\| \le s$, also die Behauptung.

(b) Sei X gleichmäßig konvex. Gilt $\lim_{n\to\infty}\|x_n\| = \|x\|$, so konvergiert (x_n) sogar in Norm gegen x.

Lösung: Sei $x' \in X$ mit $\|x'\| = 1$ so gewählt, dass $\langle x', x\rangle = \|x\|$ gilt. Angenommen, (x_n) konvergiert nicht in Norm gegen x. Dann gibt es also nach Übergang zu einer Teilfolge ein $\varepsilon > 0$ mit $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$ für alle n. Sei $\delta > 0$ wie in der Definition der gleichmäßigen Konvexität. Sei $r > \|x\|$ so gewählt, dass $(1-\delta)r < \|x\|$ gilt. Dann ist

$$\begin{aligned}\|x\| = \langle x', x\rangle = \lim_{n\to\infty}\left\langle x', \tfrac{x+x_n}{2}\right\rangle \leq \|x'\| \limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n+x}{2}\right\| \\ = r \limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{x_n/r + x/r}{2}\right\| \leq (1-\delta)r < \|x\|,\end{aligned}$$

ein Widerspruch.

37. Sei H ein Hilbertraum und $\mathscr{O}$ die Menge aller (mehrwertigen) Operatoren auf H, wobei $D(A) = \emptyset$ für $A \in \mathscr{O}$ zugelassen sei. Wir versehen $\mathscr{O}$ mit der Addition und Skalarmultiplikation aus der Vorlesung. Sei $\mathscr{A}$ die Menge der akkretiven Operatoren in $\mathscr{O}$ und $\mathscr{M}$ die Menge der m-akkretiven Operatoren in $\mathscr{A}$.

(a) Welche der Mengen $\mathscr{O}$, $\mathscr{A}$ und $\mathscr{M}$ sind Vektorräume?

Lösung: Keiner dieser Räume ist ein Vektorraum. Wäre nämlich e ein neutrales Element bezüglich der Addition, so müsste $e = \{(x,0) : x \in H\}$ sein, denn $D(A+e) = D(A) \cap D(e)$ zeigt $D(e) = H$. Ist aber A ein Operator mit $D(A) \neq H$, so kann es keinen Operator $B \in \mathscr{O}$ mit $A + B = e$ geben, da stets $D(A+B) \subset D(A)$ gilt. Es genügt also, $A \in \mathscr{M}$ mit $D(A) \neq H$ zu finden. Hierfür kann man beispielsweise $A \coloneqq \{0\} \times H$ wählen.

(b) Welche der Mengen $\mathscr{O}$, $\mathscr{A}$ und $\mathscr{M}$ sind Kegel, enthalten also zu je zwei Elementen auch deren Summe und zu jedem Element auch die nicht-negativen Vielfachen?

Lösung: Bei $\mathscr{O}$ ist für die Kegeleigenschaft nichts zu zeigen.

Es ist nach Definition klar, dass die Summe akkretiver Operatoren und nicht-negative skalare Vielfache wiederum akkretiv sind. Also ist $\mathscr{A}$ ein Kegel.

Ist $H = \{0\}$, so ist trivialerweise auch $\mathscr{M}$ ein Kegel. Gibt es hingegen $x \in H$ mit $x \neq 0$, so sind $\{0\} \times H$ und $\{x\} \times H$ zwei Operatoren in $\mathscr{M}$, deren Summe $\emptyset$ nicht in $\mathscr{M}$ liegt. Also ist $\mathscr{M}$ kein Kegel.

(c) Gilt $\mathscr{M} + \mathscr{A} \subset \mathscr{M}$?

Lösung: Im vorigen Aufgabenteil wurde sogar $\mathscr{M} + \mathscr{M} \not\subset \mathscr{M}$ nachgewiesen. Insbesondere gilt also $\mathscr{M} + \mathscr{A} \not\subset \mathscr{M}$.

38. Sei H ein Hilbertraum und A m-akkretiv. Sei $T\colon H \to H$ akkretiv und Lipschitz-stetig. Zeige, dass $A + T$ ein m-akkretiver Operator ist!

Lösung: Die Akkretivität von $A+T$ ist klar. Laut Vorlesung genügt es also zu zeigen, dass es ein $\alpha > 0$ gibt, für das $\operatorname{Rg}(I + \alpha(A+T)) = H$ ist. Sei dazu L die Lipschitz-Konstante von T und $\alpha > 0$ so gewählt, dass $\alpha L < 1$ gilt.

Sei $y \in H$ beliebig. Die Gleichung

$$(I + \alpha(A+T))x \ni y$$

ist äquivalent zu

$$(I + \alpha A)x \ni y - \alpha T x,$$

welche wiederum als

$$x = J_\alpha(y - \alpha T x)$$

geschrieben werden kann. Setze $Rx \coloneqq J_\alpha(y - \alpha Tx)$. Dann ist wegen Kontraktivität von J_α und nach Voraussetzung

$$\|Rx_1 - Rx_2\| \le \|(y - \alpha Tx_1) - (y - \alpha Tx_2)\| = \alpha\|Tx_1 - Tx_2\| \le \alpha L\|x_1 - x_2\|$$

für alle x_1 und x_2 in H. Folglich ist R strikt kontraktiv und besitzt nach dem Banach'schen Fixpunktsatz (genau) einen Fixpunkt $x \in H$. Es gibt also $x \in H$ mit $(I + \alpha(A + T))x \ni y$. Weil y beliebig war, folgt hieraus $\mathrm{Rg}(I + \alpha(A + T)) = H$, also die Behauptung.