



---

## Übungen Elemente der Topologie: Blatt 1

---

1. Sei  $\Omega$  eine Menge. Gib einen Beweis oder ein Gegenbeispiel für jede der folgenden Aussagen:
  - (a) Sei  $I$  eine Indexmenge und sei  $\mathcal{T}_\alpha$  für jedes  $\alpha \in I$  eine Topologie von  $\Omega$ . Dann ist auch  $\mathcal{T} := \bigcap_{\alpha \in I} \mathcal{T}_\alpha$  eine Topologie von  $\Omega$ . (2)
  - (b) Seien  $\mathcal{T}_1$  und  $\mathcal{T}_2$  Topologien von  $\Omega$ . Dann ist auch  $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$  eine Topologie. (2)
  - (c) Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ein System von Teilmengen von  $\Omega$ . Es gibt eine grösste Topologie  $\mathcal{T}$  von  $\Omega$ , die  $\mathcal{A}$  enthält, d.h.  $\mathcal{T}$  ist eine Topologie,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ , und für jede weitere Topologie  $\mathcal{T}'$  von  $\Omega$  mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}'$  gilt  $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$ . (2)
  - (d) Sei  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$  ein System von Teilmengen von  $\Omega$ . Es gibt eine feinste Topologie  $\mathcal{T}$  von  $\Omega$ , die  $\mathcal{A}$  enthält, d.h.  $\mathcal{T}$  ist eine Topologie,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ , und für jede weitere Topologie  $\mathcal{T}'$  von  $\Omega$  mit  $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}'$  gilt  $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ . (2)
2. Sei  $\Omega = \{0, 1, 2\}$ . Bestimme alle Topologien auf  $\Omega$ ! Wie viele dieser Topologien sind paarweise echt verschieden, entstehen also nicht durch Umnummerierung der Elemente auseinander? (2)
3. Für  $a \in \mathbb{Z}$  und  $b \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$  definiere  $N_{a,b} := \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\}$ . Zeige: (T)
  - (a) Das Mengensystem
$$\mathcal{T} := \{\mathcal{O} \subset \mathbb{Z} : \forall k \in \mathcal{O} \exists a \in \mathbb{Z} \exists b \in \mathbb{N} k \in N_{a,b} \subset \mathcal{O}\}$$
ist eine Topologie von  $\mathbb{Z}$ .
  - (b) Ist  $\mathcal{O} \in \mathcal{T}$ , so ist  $\mathcal{O} = \emptyset$  oder  $\mathcal{O}$  ist eine unendliche Menge.
  - (c) Bezeichnet  $\mathbb{P} \subset \mathbb{N}$  die Menge der Primzahlen, so gilt  $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} = \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ .
  - (d) Für jedes  $a \in \mathbb{Z}$  und jedes  $b \in \mathbb{N}$  ist die Menge  $N_{a,b}$  sowohl offen als auch abgeschlossen.
  - (e) Es gibt unendlich viele Primzahlen.