Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 2

4. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass

$$\mathscr{T} := \{O \subset M : \forall x \in O \; \exists \varepsilon > 0 \; B(x, \varepsilon) \subset O\}$$

eine Topologie von M ist und dass die Menge der offenen Kugeln in M eine Basis dieser Topologie ist! (2)

Lösung: Die Eigenschaften $\emptyset \in \mathscr{T}$ und $M \in \mathscr{T}$ sind klar. Sind O_α, $\alpha \in I$, Mengen in $\mathscr{T}$ und $O := \bigcup_\alpha O_\alpha$, so gibt es zu $x \in O$ ein $\hat{\alpha} \in I$ mit $x \in O_{\hat{\alpha}}$, nach Voraussetzung also ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset O_{\hat{\alpha}} \subset O$. Also ist auch O in $\mathscr{T}$. Sind schließlich O_1 und O_2 in $\mathscr{T}$, $O := O_1 \cap O_2$, und ist $x \in O$, so gibt es $\varepsilon_1 > 0$ und $\varepsilon_2 > 0$ mit $B(x, \varepsilon_1) \subset O_1$ und $B(x, \varepsilon_2) \subset O_2$. Wählt man nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, so hat man $B(x, \varepsilon) \subset B(x, \varepsilon_1) \cap B(x, \varepsilon_2) \subset O$, was $O \in \mathscr{T}$ zeigt. Also erfüllt $\mathscr{T}$ alle Axiome einer Topologie.

Um zu zeigen, dass die offenen Kugeln eine Basis dieser Topologie bilden, müssen wir nachweisen, dass jede offene Kugel in $\mathscr{T}$ liegt und dass sich jede Menge in $\mathscr{T}$ als Vereinigung von offenen Kugeln schreiben lässt.

Sei zuerst $O \in \mathscr{T}$. Wähle zu jedem $x \in O$ ein $\varepsilon_x > 0$ mit $B(x, \varepsilon_x) \subset O$. Dann ist wegen $x \in B(x, \varepsilon_x)$ also $O = \bigcup_{x \in O} B(x, \varepsilon_x)$, was zeigt, dass jede Menge in $\mathscr{T}$ eine Vereinigung von offenen Kugeln ist.

Sei nun $B(x_0, \varepsilon_0)$ eine offene Kugel, also $x_0 \in M$ und $\varepsilon_0 > 0$. Sei $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ beliebig, also $d(x, x_0) < \varepsilon_0$. Setze $\varepsilon := \varepsilon_0 - d(x, x_0)$. Ist nun $y \in B(x, \varepsilon)$, so gilt

$$d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) < \varepsilon + d(x, x_0) = \varepsilon_0,$$

also $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$. Dies zeigt $B(x, \varepsilon) \subset B(x_0, \varepsilon_0)$. Weil $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ beliebig war, ist nach Definition $B(x_0, \varepsilon_0) \in \mathscr{T}$.

5. Für $x, y \in \mathbb{R}$ definiere $d_1(x, y) := |x - y|$ und $d_2(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Zeige:

(a) Die Abbildungen d_1 und d_2 sind Metriken auf $\mathbb{R}$. (2)

Lösung: Dass d_1 eine Metrik ist, ist aus den Anfängervorlesungen bekannt.

Wir prüfen für d_2 die Axiome einer Metrik. Offenbar ist $0 \le d(x, y) < \infty$, $d(x, x) = 0$ und $d(x, y) = d(y, x)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Ist $d(x, y) = 0$, so ist $\arctan(x) = \arctan(y)$, was wegen Injektivität von arctan zeigt, dass $x = y$ gilt.

Es ist nur noch die Dreiecksungleichung zu zeigen. Seien dazu $x, y, z \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} d_2(x, z) &= |\arctan(x) - \arctan(z)| \\ &\le |\arctan(x) - \arctan(y)| + |\arctan(y) - \arctan(z)| = d_2(x, y) + d_2(y, z) \end{aligned}$$

nach der gewöhnlichen Dreiecksungleichung für reelle Zahlen.

(b) Die Metriken d_1 und d_2 sind äquivalent, d.h. sie erzeugen dieselbe Topologie. (2)

Lösung: Sei $\mathscr{T}_1$ die von d_1 erzeugte Topologie und $\mathscr{T}_2$ die von d_2 erzeugte Topologie. Wir müssen $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$ zeigen. Im Folgenden schreiben wir $B_1(x, \varepsilon)$ für Kugeln bezüglich der Metrik d_1 und $B_2(x, \varepsilon)$ für Kugeln bezüglich der Metrik d_2.

Sei zuerst $O \in \mathscr{T}_2$ gegeben, und sei $x \in O$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon_2 > 0$ mit $B_2(x, \varepsilon_2) \subset O$. Da arctan stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|\arctan(y) - \arctan(x)| < \varepsilon_2$ für alle y mit $|y - x| < \delta$. Setze $\varepsilon_1 := \delta$. Ist nun $y \in B_1(x, \varepsilon_1)$, also $|y - x| < \delta$, so ist

$$d_2(y, x) = |\arctan(y) - \arctan(x)| < \varepsilon_2,$$

also $y \in B_2(x, \varepsilon_2) \subset O$, was $B_1(x, \varepsilon_1) \subset O$ zeigt. Weil $x \in O$ beliebig war, zeigt dies nach Definition $O \in \mathscr{T}_1$. Also ist $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

Sei nun $O \in \mathscr{T}_1$ gegeben, und sei $x \in O$ beliebig. Dann gibt es ein $\varepsilon_1 > 0$ mit $B_1(x, \varepsilon_1) \subset O$. Da tan stetig ist, gibt es zu $a := \arctan(x)$ ein $\delta > 0$ mit $|\tan(b) - \tan(a)| < \varepsilon_1$ für alle b mit $|b - a| < \delta$. Setze $\varepsilon_2 := \delta$. Ist nun $y \in B_2(x, \varepsilon_2)$, also $|\arctan(y) - \arctan(x)| < \delta$, so ist mit $a = \arctan(x)$ und $b := \arctan(y)$ also $|b - a| < \delta$ und daher

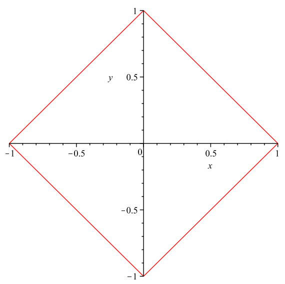
$$d_1(y, x) = |y - x| = |\tan(\arctan(y)) - \tan(\arctan(x))| = |\tan(b) - \tan(a)| \leq \varepsilon_1,$$

was $y \in B_1(x, \varepsilon_1) \subset O$ und somit $B_2(x, \varepsilon_2) \subset O$ zeigt. Weil $x \in O$ beliebig war, zeigt dies nach Definition $O \in \mathscr{T}_2$. Also ist $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

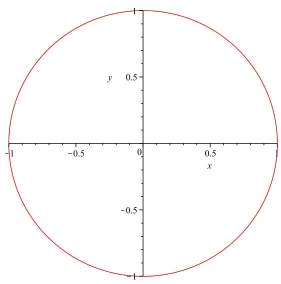
Wir haben insgesamt $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$ gezeigt. Nebenbei bemerkt wurde von arctan nur die Eigenschaft verwendet, injektiv und bistetig zu sein, also stetig mit stetiger Umkehrfunktion.

6. Skizziere die Einheitskugeln von $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ und $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$! Zeige zudem, dass die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$, äquivalent sind! (2)

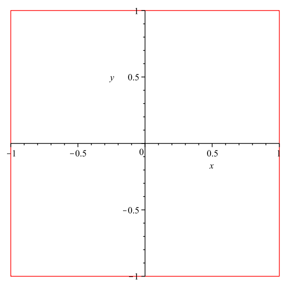
Lösung: Die Einheitskugeln sind:



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$



$(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$

Für den Beweis der Äquivalenz der Normen sei $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Dann ist

$$\|x\|_\infty^2 = \max_{i=1,\ldots,d} |x_i|^2 \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i|^2 = \|x\|_2^2 \leq \sum_{i=1}^{d} (\max_{j=1,\ldots,d} |x_j|)^2 = d\|x\|_\infty^2,$$

also $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{d}\|x\|_\infty$, und analog

$$\|x\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{d} |x_i| = \|x\|_1 \leq d\|x\|_\infty,$$

was nach Definition die Äquivalenz von $\|\cdot\|_2$ mit $\|\cdot\|_\infty$ und von $\|\cdot\|_1$ mit $\|\cdot\|_\infty$ zeigt. Da die Äquivalenz von Normen eine Äquivalenzrelation ist, sind diese drei Normen paarweise äquivalent.

7. Zeige, dass $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ und $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ normierte Räume sind! Sind die Normen äquivalent? (2)

Lösung: Wir zeigen zuerst, dass $\|f\|_\infty := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|$ eine Norm auf $C[0,1]$ ist. Da $[0,1]$ kompakt und f stetig ist, nimmt f ein Maximum an, was insbesondere $\|f\|_\infty < \infty$

zeigt, während $\|f\|_\infty \geq 0$ und $\|0\|_\infty = 0$ klar ist. Ist $f \neq 0$, so gibt es $x \in [0,1]$ mit $f(x) \neq 0$, also ist $\|f\|_\infty \geq |f(x)| > 0$, was umgekehrt zeigt, dass $\|f\|_\infty = 0$ nur für $f = 0$ möglich ist. Sind schließlich f und g in $\mathrm{C}[0,1]$, so gilt für jedes $x \in [0,1]$ die Abschätzung

$$|(f+g)(x)| = |f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \max_{0 \leq y \leq 1} |f(y)| + \max_{0 \leq y \leq 1} |g(y)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

was nach Definition $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ zeigt. Wir haben somit alle Eigenschaften einer Norm überprüft.

Wir zeigen als nächstes, dass auch $\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x$ eine Norm auf $\mathrm{C}[0,1]$ ist. Da mit f auch $x \mapsto |f(x)|$ eine stetige Funktion und somit (Riemann-)integrierbar ist, ist $\|f\|_1$ wohldefiniert und endlich. Die Eigenschaft $\|f\|_1 \geq 0$ folgt aus der Monotonie des Integrals, während $\|0\|_1 = 0$ nach Definition des Integrals klar ist. Ist $f \neq 0$, so gibt es ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) \neq 0$. Sei $\alpha := |f(x_0)| > 0$ und $\varepsilon := \frac{\alpha}{2}$. Da f stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| \leq \delta$. Also ist

$$|f(x)| \geq |f(x_0)| - |f(x_0) - f(x)| \geq \alpha - \varepsilon = \frac{\alpha}{2}.$$

für alle $x \in [0,1]$ mit $|x - x_0| \leq \delta$. Sei $[a,b] := [0,1] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, also insbesondere $0 \leq a < b \leq 1$. Dann ist wegen der Monotonie des Integrals

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \geq \int_a^b \frac{\alpha}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha(b-a)}{2} > 0.$$

Im Umkehrschluss folgt aus $\|f\|_1 = 0$ also $f = 0$. Für die Dreiecksungleichung seien schließlich f und g in $\mathrm{C}[0,1]$. Dann ist

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 (|f(x)| + |g(x)|)\,\mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

wegen Monotonie und Linearität des Integrals.

Wir zeigen nun noch, dass die Normen nicht äquivalent sind. Dazu betrachten wir die Folge (f_n) in $\mathrm{C}[0,1]$, die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 - nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

definiert ist. Dann ist

$$\|f_n\|_\infty = 1$$

und

$$\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(x)|\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)\,\mathrm{d}x = \Big[x - \frac{nx^2}{2}\Big]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n},$$

was man auch elementargeometrisch direkt sieht. Wären nun die beiden Normen äquivalent, so gäbe es insbesondere eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass

$$1 = \|f_n\|_\infty \leq c\|f_n\|_1 = \frac{c}{2n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ein Widerspruch.