Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 4

11. Sei Ω ein Hausdorff-Raum, (x_n) eine Folge in Ω und $x \in \Omega$.

(a) *Haarspalter-Lemma:* Zeige, dass (x_n) genau dann gegen x konvergiert, wenn jede Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n) ihrerseits wieder eine Teilfolge $(x_{n_{k_\ell}})$ besitzt, die gegen x konvergiert! (2)

(b) Konvergiert (x_n) genau dann, wenn jede Teilfolge von (x_n) eine konvergente Teilfolge besitzt? (1)

12. Sei Ω ein Hausdorff-Raum, $A \subset \Omega$, und sei $B \coloneqq \{x \in \Omega \mid \exists (x_n) \subset A, \lim_{n\to\infty} x_n = x\}$. Zeige:

(a) Es gilt $B \subset \overline{A}$. (1)

(b) Erfüllt Ω das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist $B = \overline{A}$. (2)

13. Sei $(G, +)$ eine kommutative Gruppe mit neutralem Element 0. Wir fixieren eine Topologie $\mathscr{T}$ auf G mit der Eigenschaft, dass es zu x und y aus G und $U \in \mathcal{U}(x-y)$ stets $U_1 \in \mathcal{U}(x)$ und $U_2 \in \mathcal{U}(y)$ mit $U_1 - U_2 \coloneqq \{u_1 - u_2 : u_1 \in U_1, u_2 \in U_2\} \subset U$ gibt. Man nennt G dann eine *topologische Gruppe*. Zeige:

(a) Ist O offen und $x \in G$, so sind auch $x - O$, $x + O$ und $-O$ offen. (2)

(b) Ist G separabel und besitzt 0 eine abzählbare Umgebungsbasis, so erfüllt G das zweite Abzählbarkeitsaxiom. (2)