Universität Ulm

Abgabe: Dienstag, 17.11.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 5

14. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz. Bestimme die abgeschlossene Hülle und den inneren Kern der Menge $C(\mathbb{R}) \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ der stetigen Funktionen! (2)
(Schwierige) Bonusaufgabe ohne Wertung: Bestimme den Folgenabschluss von $C(\mathbb{R})$!

15. Sei $(I, \preceq)$ eine gerichtete Menge. Es gebe ein $\iota_0 \in I$ mit der Eigenschaft, dass aus $\iota_0 \preceq \iota$ bereits $\iota_0 = \iota$ folgt. Ist nun Ω ein Hausdorff-Raum und $(x_\iota)_{\iota \in I}$ ein Netz zur Indexmenge $(I, \preceq)$ mit Werten in Ω. Zeige, dass $(x_\iota)_{\iota \in I}$ konvergiert und bestimme den Grenzwert! (1)

16. Sei $J \coloneqq \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Für $x, y \in J$ sei $x \preceq_J y$ als $|x| \geq |y|$ definiert. Zeige, dass $(J, \preceq_J)$ eine gerichtete Menge ist! Sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{R}$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (4)

(i) $y = \lim_{x \to 0} f$ existiert, d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - y| < \varepsilon$ für alle $x \in J$ mit $|x| < \delta$.

(ii) Für jedes Netz (x_ι) in J mit $\lim x_\iota = 0$ gilt $\lim f(x_\iota) = y$.

(iii) Das Netz $(J, \preceq_J) \to \mathbb{R}$, $\iota \mapsto f(\iota)$ konvergiert gegen y.

17. Sei (M, d) ein metrischer Raum. Ein Netz $(x_\iota)_{\iota \in I}$ heißt *Cauchy-Netz*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\iota_0(\varepsilon)$ mit der Eigenschaft gibt, dass $d(x_i, x_j) < \varepsilon$ für alle $i \succeq \iota_0(\varepsilon)$ und $j \succeq \iota_0(\varepsilon)$ gilt. Zeige, dass (M, d) genau dann vollständig ist, wenn jedes Cauchy-Netz konvergiert! (3)
Erinnerung: Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge konvergiert. Eine Folge (x_n) heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft gibt, dass $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ gilt.