UNIVERSITÄT ULM

Abgabe: Dienstag, 01.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10 + 3

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 7

21. (a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bijektiv und stetig (bezüglich der euklidischen Topologie). Zeige, dass f ein Homöomorphismus ist! (2)

Lösung: Nach Aufgabe 18 (b) muss nur gezeigt werden, dass

$$(f^{-1})^{-1}\big((a,b)\big) = f\big((a,b)\big)$$

für alle $a < b$ eine offene Menge ist. Sei dazu $c \coloneqq f(a)$ und $d \coloneqq f(b)$. Wir zeigen genauer, dass $f\big((a,b)\big) = (c,d)$ bzw. $f\big((a,b)\big) = (d,c)$ gilt, je nachdem, ob $c < d$ oder $d < c$ ist. Der Einfachheit halber sei $c < d$; der Beweis im anderen Fall verläuft analog.

Die Inklusion „$\supset$“ ist gerade die Aussage des Zwischenwertsatzes. Sei nun also $x \in (a,b)$ beliebig. Wäre $f(x) \geq d$, so ist entweder $f(x) = d$ oder es gibt nach dem Zwischenwertsatz ein $y \in (a,x)$ mit $f(y) = d$. Beide Fälle widersprechen wegen $f(b) = d$ der Injektivität von f. Mit einem analogen Argument kann man den Fall $f(x) \leq c$ ausschließen. Dies zeigt die Inklusion „$\subset$“.

Bemerkung: Man könnte auch einen Satz aus der Grundvorlesung zitieren, der besagt, dass eine bijektive, stetige Funktion bereits streng monoton ist. Dann ist die Inklusion „$\subset$“ trivial.

(b) Zeige, dass es Hausdorff-Topologien $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ auf $\mathbb{R}$ und eine bijektive und stetige Funktion $f\colon (\mathbb{R},\mathscr{T}_1) \to (\mathbb{R},\mathscr{T}_2)$ gibt, für die f kein Homöomorphismus ist. (2)

Lösung: Wähle beispielsweise $\mathscr{T}_1 = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (oder als die Sorgenfrey-Topologie), $\mathscr{T}_2$ als die euklidische Topologie und $f(x) \coloneqq x$. Dann sind Urbilder offener Mengen wegen $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$ offen, aber Bilder offener Mengen wegen $\mathscr{T}_1 \not\subset \mathscr{T}_2$ im Allgemeinen nicht offen. Dies zeigt, dass f stetig ist, f^{-1} hingegen nicht.

22. Seien $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ topologische Räume und $\mathcal{B}_\alpha$ jeweils eine Basis der Topologie von X_α. Sei $X \coloneqq \prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen. Zeige:

(a) Sei $x = (x_\alpha) \in X$. Eine Menge $U \subset X$ ist genau dann eine Umgebung von x, wenn es $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in I$ und $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ gibt, für die

$$x \in \big\{y = (y_\alpha) \in X : y_{\alpha_i} \in B_i\big\} \subset U$$

erfüllt ist. (2)

Lösung: Sei $U \in \mathscr{U}(x)$. Dann gibt es eine offene Menge O mit $x \in O \subset U$ und daher wiederum eine Basismenge B mit $x \in B \subset O$, also $B = \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_i)$ mit $\alpha_i \in I$ und O_i offen in X_{α_i}. Wegen $x \in B$ ist $x_{\alpha_i} = \pi_{\alpha_i}(x) \in O_i$. Folglich gibt es Basismengen $B_i \in \mathcal{B}_{\alpha_i}$ mit $x_{\alpha_i} \in B_i \subset O_i$ für $i = 1,\dots,n$, also

$$x \in \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(B_i) = \big\{y = (y_\alpha) \in X : y_{\alpha_i} \in B_i\big\} \subset \bigcap_{i=1}^n \pi_{\alpha_i}^{-1}(O_i) = B \subset O \subset U.$$

Gibt es umgekehrt solche Mengen B_i, so ist also x in einer offenen Menge, die in U liegt, was nach Definition heißt, dass U eine Umgebung von x ist.

(b) Sei $\beta \in I$ fest. Die Projektion π_β bildet offene Mengen auf offene Mengen ab, aber abgeschlossene nicht zwangsläufig auf abgeschlossene. (2)

Lösung: Sei $O \subset X$ offen, $U \coloneqq \pi_\beta(O)$ und $y \in U$. Dann gibt es $x \in O$ mit $x_\beta = \pi_\beta(x) = y$. Laut Vorlesung gibt es dann offene Mengen $O_\alpha \subset X_\alpha$, von denen für nur endlich viele $O_\alpha \neq X_\alpha$ gilt, mit $x \in \bigcap B \coloneqq \pi_\alpha^{-1}(O_\alpha) \subset O$. Insbesondere ist dann

$$y = \pi_\beta(x) \in \pi_\beta(B) = O_\beta \subset \pi_\beta(O) = U,$$

was zeigt, dass U eine Umgebung von y ist. Weil U Umgebung jedes seiner Elemente ist, erhalten wir, dass U offen ist.

In $\mathbb{R}^2$ ist die Menge $A \coloneqq \{(x, y) : x > 0, y \geq \frac{1}{x}\}$ abgeschlossen, ihr Bild $\pi_1(A) = (0, \infty)$ hingegen nicht.

23. Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subset M$. Dann ist die Einschränkung $d|_{A\times A}$ von d offenbar eine Metrik auf A. Es bezeichne $\mathscr{T}_d$ die zugehörige Topologie und $\mathscr{T}_r$ die relative Topologie von A bezüglich M; man nennt $\mathscr{T}_r$ auch die *Spurtopologie*. Zeige $\mathscr{T}_d = \mathscr{T}_r$! (2)

Lösung: Die Mengen $B_A(x, r) \coloneqq \{y \in A : d(x, y) < r\}$ mit $x \in A$ und $r > 0$ bilden eine Basis von $\mathscr{T}_d$. Da $B_A(x, r) = B_M(x, r) \cap A$ gilt, ist laut Vorlesung $B_A(x, r) \in \mathscr{T}_r$. Da also jede Menge einer Basis von $\mathscr{T}_d$ in $\mathscr{T}_r$ enthalten ist, folgt $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}_r$.

Bezeichne $\mathscr{T}$ die Topologie von M. Sei $O_A \in \mathscr{T}_r$. Laut Vorlesung gibt es ein $O \in \mathscr{T}$ mit $O_A = A \cap O$. Sei $x \in O_A$. Dann ist $x \in O$ und daher gibt es $r > 0$ mit $B_M(x, r) \subset O$. Also ist $x \in B_A(x, r) \subset A \cap O = O_A$, was zeigt, dass O_A eine Umgebung von x bezüglich $\mathscr{T}_d$ ist. Also ist O_A bezüglich $\mathscr{T}_d$ eine Umgebung jedes seiner Elemente und somit $O_A \in \mathscr{T}_d$. Wir haben $\mathscr{T}_r \subset \mathscr{T}_d$ gezeigt.

24. **Bonusaufgabe:** Sei B eine wohlgeordnete Menge, $A \subset B$ und $f\colon A \to B$ monoton wachsend und bijektiv. Die Menge A sei ein *Initialsegment* von B; das bedeutet, dass für x und y aus B mit $y \in A$ und $x \leq y$ gilt, dass auch x in A liegt. Zeige, dass dann $A = B$ ist und $f(\alpha) = \alpha$ für alle $\alpha \in A$ gilt! (+3)

Lösung: Sei $N \coloneqq \{\alpha \in A : f(\alpha) \neq \alpha\}$. Die Aussage, die gezeigt werden soll, ist äquivalent zu $N = \emptyset$. Nehmen wir also an N wäre nicht leer. Dann besitzt N nach Voraussetzung ein Minimum α_0, also $\alpha_1 \coloneqq f(\alpha_0) \neq \alpha_0$, aber $f(\alpha) = \alpha$ für $\alpha < \alpha_0$.

Wäre nun $\alpha_1 < \alpha_0$, so wäre α_1 nach Voraussetzung in A und somit $f(\alpha_0) = \alpha_1 = f(\alpha_1)$ im Widerspruch zur Injektivität von f.

Nehmen wir nun $\alpha_1 > \alpha_0$ an. Sei α ein weiteres Element von A. Dann ist für $\alpha < \alpha_0$ also $f(\alpha) = \alpha < \alpha_0$, für $\alpha \geq \alpha_0$ hingegen $f(\alpha) \geq f(\alpha_0) = \alpha_1 > \alpha_0$. Es gibt also kein $\alpha \in A$ mit $f(\alpha) = \alpha_0$ im Widerspruch zur Surjektivität von f.

Wir haben somit $\alpha_1 = \alpha_0$ gezeigt, was im Widerspruch zur Wahl von α_0 steht. Also war die Annahme falsch, dass N nicht leer ist, und die Behauptung ist bewiesen.

Hinweis: In der ursprünglichen Aufgabenstellung fehlte die Voraussetzung, dass A ein Initialsegment von B sein muss. Ohne diese Voraussetzung ist die Folgerung allerdings falsch, wie das Gegenbeispiel $B = \mathbb{N}$, $A = 2\mathbb{N}$, $f(n) \coloneqq n/2$ zeigt.