Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Übungen Elemente der Topologie: Blatt 9

27. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Zeige:

(a) Ist $K \subset X$ folgenkompakt, so ist auch $f(K)$ folgenkompakt. (1)

(b) Ist $K \subset X$ abzählbar kompakt, so ist auch $f(K)$ abzählbar kompakt. (1)

28. Sei X ein Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und sei $K \subset X$ abzählbar kompakt. Zeige, dass K kompakt ist! (2)

29. Sei X ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $K \subset X$ abzählbar kompakt. Zeige, dass f auf K ein Minimum und ein Maximum annimmt! (1)

30. Sei $\mathcal{K} \coloneqq \{u \in \mathcal{F}([0,1]) : u(x) \in [0,1] \text{ für alle } x \in [0,1]\}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Zeige:

(a) $\{u \in \mathcal{K} : u(x) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } x \in [0,1]\}$ ist folgenkompakt, aber nicht kompakt. (3)

(b) $\mathcal{K}$ ist nicht folgenkompakt. (2)
Tipp: Betrachte $u_n(x) \coloneqq 10^n x - [10^n x]$, $[y] \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} : n \le y\}$.
Bemerkung: Wir werden später sehen, dass B kompakt ist.