Universität Ulm

Dienstag, 15.12.2009

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 9

27. Seien X und Y Hausdorff-Räume und $f\colon X \to Y$ stetig. Zeige:

(a) Ist $K \subset X$ folgenkompakt, so ist auch $f(K)$ folgenkompakt. (1)

Lösung: Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Dann gibt es $x_n \in K$ mit $y_n = f(x_n)$. Nach Voraussetzung besitzt (x_n) eine Teilfolge (x_{n_k}), die gegen ein $x \in K$ konvergiert. Dann konvergiert wegen Stetigkeit $(f(x_{n_k}))$ gegen $f(x) \in f(K)$. Also hat (y_n) eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge.

(b) Ist $K \subset X$ abzählbar kompakt, so ist auch $f(K)$ abzählbar kompakt. (1)

Lösung: Sei (O_i) eine abzählbare Überdeckung von $f(K)$, also $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^\infty O_i$. Dann ist

$$K \subset f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^\infty O_i\Big) = \bigcup_{i=1}^\infty f^{-1}(O_i).$$

eine abzählbare Überdeckung von K mit offenen Mengen, da f stetig ist. Nach Voraussetzung gibt es eine endliche Teilüberdeckung $K \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(O_i)$ mit $n \in \mathbb{N}$. Dies heißt gerade $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^n O_i$. Also besitzt jede abzählbare Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung.

28. Sei X ein Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, und sei $K \subset X$ abzählbar kompakt. Zeige, dass K kompakt ist! (2)

Lösung: Sei (B_n) eine abzählbare Basis der Topologie. Sei K abzählbar kompakt und (O_α) eine Überdeckung von K. Dann ist $\mathcal{A} \coloneqq \{B_n \mid \exists \alpha : B_n \subset O_\alpha\}$ eine abzählbare Familie offener Mengen, die wiederum K überdeckt und genauer gesagt sogar $\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_\alpha O_\alpha$ erfüllt. Also gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilmenge $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_n\}$ von $\mathcal{A}$ mit $K \subset \bigcup \mathcal{A}'$. Wählt man zu jedem $A_i \in \mathcal{A}'$ ein α_i mit $A_i \subset O_{\alpha_i}$, so ist $K \subset \bigcup_{i=1}^n O_{\alpha_i}$ eine endliche Teilüberdeckung von K. Also besitzt jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung.

29. Sei X ein Hausdorff-Raum und $f\colon X \to \mathbb{R}$ stetig. Sei $K \subset X$ abzählbar kompakt. Zeige, dass f auf K ein Minimum und ein Maximum annimmt! (1)

Lösung: Nach Aufgabe 27, Teil (b) ist $f(K)$ abzählbar kompakt. Weil $\mathbb{R}$ (mit der euklidischen Topologie) das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, ist $f(K)$ nach Aufgabe 28 sogar kompakt, also nach dem Satz von Heine-Borel abgeschlossen und beschränkt. Folglich besitzt $f(K)$ ein Maximum und ein Minimum. Diese sind das Maximum und Minimum von f.

Bemerkung: Man kann alternativ auch damit argumentieren, dass $\mathbb{R}$ ein metrischer Raum ist und daher jede abzählbar kompakte Menge kompakt ist.

30. Sei $\mathcal{K} \coloneqq \{u \in \mathcal{F}([0,1]) : u(x) \in [0,1] \text{ für alle } x \in [0,1]\}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Zeige:

(a) $\{u \in \mathcal{K} : u(x) \neq 0 \text{ für höchstens abzählbar viele } x \in [0,1]\}$ ist folgenkompakt, aber nicht kompakt. (3)

Lösung: Bezeichne A die Menge in der Aufgabenstellung. Sei (u_n) eine Folge in A und $T_n := \{x \in [0,1] : u_n(x) \neq 0\}$. Nach Voraussetzung ist T_n für jedes n höchstens abzählbar. Also ist die Vereinigung T der T_n selbst ebenfalls höchstens abzählbar. Nach Definition gilt $u_n(x) = 0$ für $x \notin T$ und $n \in \mathbb{N}$. Sei (t_n) eine Abzählung von T. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine Teilfolge von (u_n), die in t_1 konvergiert. Diese besitzt wiederum eine Teilfolge, die in t_2 konvergiert. Induktiv findet man weitere Teilfolgen mit der Eigenschaft, dass die k.te Teilfolge in t_k konvergiert. Die Diagonalfolge ist dann eine Teilfolge, die in jedem $t_k \in T$ konvergiert. Die Konvergenz außerhalb von T ist bereits klar. Bezeichne $u \in \mathcal{F}([0,1])$ den (punktweisen) Grenzwert dieser Teilfolge. Dann ist $u(x) = 0$ für $x \notin T$. Weil $[0,1]$ abgeschlossen ist, gilt zudem $u(x) \in [0,1]$ für alle $x \in T$. Also ist $u \in A$. Wir haben somit die Folgenkompaktheit von A nachgewiesen.

Wir zeigen, dass der Abschluss von A die Menge $\mathcal{K}$ enthält; man könnte sogar zeigen, dass $\mathcal{K} = \overline{A}$ ist. Sei dazu $u \in \mathcal{K}$ beliebig gewählt und U eine Umgebung von u, so gibt es $\varepsilon > 0$ und $(x_i)_{i=1}^n$ mit

$$B := \{v \in \mathcal{F}([0,1]) : |v(x_i) - u(x_i)| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n)\} \subset U.$$

Setzt man speziell $v(x_i) := u(x_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ und $v(x) := 0$ sonst, so ist v in B, es gilt $v(x) \in [0,1]$ für alle $x \in [0,1]$, und es ist $v(x) \neq 0$ für nur endlich viele x. Also ist $v \in U \cap A \neq \emptyset$, was $v \in \overline{A}$ zeigt. Wir haben $\mathcal{K} \subset \overline{A}$ nachrechnet. Insbesondere ist also $\overline{A} \neq A$, was zeigt, dass A nicht abgeschlossen und somit insbesondere nicht kompakt ist.

(b) $\mathcal{K}$ ist nicht folgenkompakt. (2)
Tipp: Betrachte $u_n(x) := 10^n x - [10^n x]$, $[y] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}$.
Bemerkung: Wir werden später sehen, dass $\mathcal{K}$ kompakt ist.

Lösung: Sei u_n die Folge im Tipp. Dann gilt $u_n(x) \in [0,1)$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist (u_n) also eine Folge in $\mathcal{K}$. Wir nehmen an, es gäbe eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n). Definiere $x := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{10^i}$ mit

$$x_i := \begin{cases} 2, & \text{falls } i = n_k \text{ für ein gerades } k, \\ 7, & \text{falls } i = n_k \text{ für ein ungerades } k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist x_i die i.te Stelle der Dezimalbruchentwicklung von x. Offenbar ist $x \in [0,1]$. Zudem gilt mit $\langle y \rangle := y - [y]$

$$u_n(x) = \Big\langle \sum_{i=1}^{\infty} x_i 10^{n-i} \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1-n}^{\infty} x_{n+i} 10^{-i} \Big\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_{n+i} 10^{-i} \in \Big[\frac{x_{n+i}}{10}, \frac{x_{n+i}+1}{10}\Big].$$

Nach Wahl der x_i gilt also $u_{n_k}(x) \leq \frac{3}{10}$ für gerades k und $u_{n_k}(x) \geq \frac{7}{10}$ für ungerades k. Also konvergiert die Folge $(u_{n_k}(x))$ nicht, was im Widerspruch zur Wahl von (u_{n_k}) steht. Folglich besitzt (u_n) keine konvergente Teilfolge.