Universität Ulm

Dienstag, 26.01.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 10

Elemente der Topologie: Blatt 12

Die Aufgaben dieses Blattes sind allesamt Bonusaufgaben: Die erreichten Punkte werden angerechnet, aber bei der Bestimmung der 50%-Hürde nicht berücksichtigt.
Es besteht hiermit also die Gelegenheit, Punkte aufzuholen, sollte man aktuell unter der Hälfte der Punkte liegen.

38. Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Es sei $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ eine Vervollständigung von (M_i, d_i), also $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ vollständig und $\Phi_i \colon (M_i, d_i) \to (\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ isometrisch mit dichtem Bild. Sei zudem f eine Funktion von M_1 nach M_2 mit der Eigenschaft, dass für jede Cauchy-Folge (x_n) in M_1 die Folge $(f(x_n))$ eine Cauchy-Folge in M_2 ist. Zeige:

(a) Es gibt genau eine Funktion $\hat{f} \colon \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$, bei der

$$\hat{f}(\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \Phi_2(f(x_n))$$

für jede Cauchy-Folge (x_n) in M_1 gilt. Diese erfüllt $\hat{f} \circ \Phi_1 = \Phi_2 \circ f$. (3)

(b) Sei $(\hat{x}_n)$ eine konvergente Folge in $\hat{M}_1$ mit Grenzwert $\hat{x}$. Dann gibt es eine Folge (x_n) in M_1 mit $\hat{d}_1(\Phi_1(x_n), \hat{x}_n) \to 0$ und $\hat{d}_2(\Phi_2(f(x_n)), \hat{f}(\hat{x}_n)) \to 0$. In diesem Fall ist (x_n) eine Cauchy-Folge in M_1 und es gilt $\lim_{n\to\infty} \Phi_1(x_n) = \hat{x}$. (2)

(c) Die Funktion $\hat{f}$ ist stetig auf $\hat{M}_1$. (1)

(d) Ist f isometrisch, so ist auch $\hat{f}$ isometrisch. (1)

39. Sei M eine Menge und seien d_1 und d_2 Metriken auf M mit der Eigenschaft, dass eine Folge (x_n) in M genau dann eine Cauchy-Folge bezüglich d_1 ist, wenn (x_n) eine Cauchy-Folge bezüglich d_2 ist. Sei $(\hat{M}_i, \hat{d}_i)$ eine Vervollständigung von (M, d_i) im Sinne der vorigen Aufgabe. Zeige:

(a) Es gibt genau einen Homöomorphismus $\Phi \colon \hat{M}_1 \to \hat{M}_2$ mit $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$. (2)

(b) Ist $d_1 = d_2$, so ist Φ isometrisch. (1)

Also sind je zwei Vervollständigungen eines gegebenen metrischen Raumes isometrisch isomorph mit einem isometrischen Isomorphismus Φ, der $\Phi \circ \Phi_1 = \Phi_2$ erfüllt.