Universität Ulm

Dienstag, 02.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 8+2

# Elemente der Topologie: Blatt 13

**40.** Sei $X$ ein Hausdorff-Raum. Zeige:

(a) Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $\mathscr{B} := \big\{\{x\}\big\}$ eine Filterbasis in $X$. Der erzeugte Filter $\mathscr{U} := \langle \mathscr{B} \rangle$ ist ein Ultrafilter mit $\mathscr{U} = \{A \subset X : x \in A\}$, und $\lim \mathscr{U} = x$. (1)
**Bemerkung:** Man nennt solch einen Filter $\mathscr{U}$ den von $x$ erzeugten *Hauptultrafilter*. Dies ist analog zum Begriff des *Hauptideals* in der Algebra.

(b) Ein Ultrafilter auf $X$ ist genau dann ein Hauptultrafilter, wenn er eine endliche Menge enthält. (2)

(c) Sei $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter und $x \in X$. Im Allgemeinen folgt aus $\lim \mathscr{U} = x$ nicht, dass $\mathscr{U}$ der von $x$ erzeugte Hauptultrafilter ist. (2)
**Tipp:** Betrachte in $[0,1]$ beispielsweise die Intervallfamilie $\mathscr{B} := \{(0,\varepsilon) : \varepsilon \in (0,1]\}$.

(d) Sei $X$ ein *Hauptultrafilterraum*, es sei also jeder Ultrafilter in $X$ ein Hauptultrafilter. Dann ist $X$ kompakt. (1)
**Bemerkung:** Diese Definition ist analog zum Begriff des *Hauptidealrings* in der Algebra.

**Zusatzaufgabe:** Finde eine einfache Charakterisierung, wann ein Hausdorff-Raum $X$ ein Hauptultrafilterraum ist! (+2)

**41.** Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A_\omega \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und $A_\omega$ sei mit der Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}$ versehen. Wir versehen $\mathcal{F}(\Omega)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und

$$\mathcal{P} := \{u \in \mathscr{F}(\Omega) : u(\omega) \in A_\omega \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$$

mit der zugehörigen Spurtopologie. Zeige, dass $\mathcal{P}$ dann homöomorph zum Produktraum $\prod_{\omega \in \Omega} A_\omega$, versehen mit der Produkttopologie, ist, und schlussfolgere, dass die Menge $\mathcal{K}$ in Aufgabe 30 kompakt ist! (2)