Universität Ulm

Dienstag, 02.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 8+2

Lösungen Elemente der Topologie: Blatt 13

40. Sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige:

(a) Sei $x \in X$ beliebig. Dann ist $\mathscr{B} := \{\{x\}\}$ eine Filterbasis in X. Der erzeugte Filter $\mathscr{U} := \langle \mathscr{B} \rangle$ ist ein Ultrafilter mit $\mathscr{U} = \{A \subset X : x \in A\}$, und $\lim \mathscr{U} = x$. (1)
Bemerkung: Man nennt solch einen Filter $\mathscr{U}$ den von x erzeugten *Hauptultrafilter*. Dies ist analog zum Begriff des *Hauptideals* in der Algebra.

Lösung: Die Eigenschaften einer Filterbasis sind trivialerweise erfüllt: Nach Definition ist $\emptyset \notin \mathscr{B}$, und zu je zwei Mengen B_1 und B_2 ist $B_1 \cap B_2 = \{x\}$, es gibt also insbesondere ein $B_3 = \{x\} \in \mathscr{B}$ mit $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Der von $\mathscr{B}$ erzeugte Filter ist nach Definition die Menge aller Obermengen von $\{x\}$, also die Menge aller $A \subset X$ mit $x \in A$.

Da für jede Menge $A \subset X$ entweder $x \in A$ oder $x \in A^c$, also entweder $A \in \mathscr{U}$ oder $A^c \in \mathscr{U}$ gilt, ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter.

Es ist $\mathcal{U}(x) \subset \mathscr{U}$, da x natürlich in jeder Umgebung von x liegt. Also gilt nach Definition $\lim \mathscr{U} = x$.

(b) Ein Ultrafilter auf X ist genau dann ein Hauptultrafilter, wenn er eine endliche Menge enthält. (2)

Lösung: Ist $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter und x das erzeugende Element von $\mathscr{U}$, so ist $\{x\}$ eine in $\mathscr{U}$ enthaltene endliche Menge.

Sei nun $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter und A eine endliche Menge in $\mathscr{U}$. Sei x ein beliebiges Element von A. Nehmen wir an, dass $\{x\}$ für alle $x \in A$ nicht in $\mathscr{U}$ liegt, so ist $\{x\}^c$ in $\mathscr{U}$ für alle $x \in A$, weil $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter ist. Nach Definition eines Filters gibt es dann eine Menge $A' \in \mathscr{U}$ mit

$$A' \subset A \cap \bigcap_{x \in A} \{x\}^c = A \setminus A = \emptyset,$$

also $\emptyset \in \mathscr{U}$, was aber bei einem Filter ausgeschlossen ist. Also gibt es ein $x \in A$ mit $\{x\} \in \mathscr{U}$. Dann ist der von x erzeugte Hauptultrafilter ein Teilfilter von $\mathscr{U}$. Wegen Maximalität ist also $\mathscr{U}$ selbst der von x erzeugte Hauptultrafilter.

(c) Sei $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter und $x \in X$. Im Allgemeinen folgt aus $\lim \mathscr{U} = x$ nicht, dass $\mathscr{U}$ der von x erzeugte Hauptultrafilter ist. (2)
Tipp: Betrachte in $[0,1]$ beispielsweise die Intervallfamilie $\mathscr{B} := \{(0, \varepsilon) : \varepsilon \in (0,1]\}$.

Lösung: Die Menge $\mathscr{B}$ im Tipp ist eine Filterbasis, da offenbar die leere Menge nicht in $\mathscr{B}$ enthalten ist und der Durchschnitt von je zwei Mengen in $\mathscr{B}$ sogar selbst wieder in $\mathscr{B}$ liegt. Sei $\mathscr{F}$ der von $\mathscr{B}$ erzeugte Filter und $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathscr{F}$ enthält.

Für jede Umgebung U von 0 gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset U$. Also ist $(0, \varepsilon) \subset U$ und daher $U \in \mathscr{F}$. Also gilt $\mathcal{U}(0) \subset \mathscr{U}$, was gerade $\lim \mathscr{U} = 0$ bedeutet. Wir haben gezeigt, dass $\mathscr{U}$ konvergiert.

Wäre $\mathscr{U}$ ein Hauptultrafilter, so müsste $\mathscr{U}$ der von 0 erzeugte Hauptultrafilter sein, da $\mathscr{U}$ gegen 0 konvergiert und der Grenzwert eindeutig ist. Dann wäre also $\{0\}$ in $\mathscr{U}$, was wegen der Filtereigenschaft bedeutet, dass es eine Menge A in $\mathscr{U}$ mit

$$A \subset \{0\} \cap (0,1) = \emptyset$$

geben müsste, also $\emptyset \in \mathscr{U}$, was für einen Filter ausgeschlossen ist. Also kann $\mathscr{U}$ kein Hauptultrafilter sein.

(d) Sei X ein *Hauptultrafilterraum*, es sei also jeder Ultrafilter in X ein Hauptultrafilter. Dann ist X kompakt. (1)

Bemerkung: Diese Definition ist analog zum Begriff des *Hauptidealrings* in der Algebra.

Lösung: Ist $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter, so ist $\mathscr{U}$ nach Voraussetzung ein Hauptultrafilter. Bezeichnen wir das erzeugende Element von $\mathscr{U}$ mit x, so ist also $\lim \mathscr{U} = x$. Dies zeigt, dass jeder Ultrafilter konvergiert. Laut Vorlesung zeigt dies, dass X kompakt ist.

Zusatzaufgabe: Finde eine einfache Charakterisierung, wann ein Hausdorff-Raum X ein Hauptultrafilterraum ist! (+2)

Lösung: Wir zeigen, dass ein Hausdorff-Raum X genau dann ein Hauptultrafilterraum ist, wenn er endlich ist.

Sei zuerst X ein endlicher Hausdorff-Raum. Dann enthält jeder Filter eine endliche Menge, da ja jede Teilmenge von X endlich ist. Folglich ist nach Aufgabenteil (b) jeder Ultrafilter in X ein Hauptultrafilter.

Sei nun X ein Hauptultrafilterraum. Wir zeigen, dass $\{x\}$ für jedes $x \in X$ offen ist. Wäre nämlich $\{x\}$ für ein $x \in X$ nicht offen, so würde das Mengensystem

$$\mathscr{B} := \big\{U \setminus \{x\} : U \in \mathcal{U}(x)\big\}$$

die leere Menge nicht enthalten. Weil $\mathscr{B}$ abgeschlossen unter Durchschnittsbildung ist, ist $\mathscr{B}$ dann sogar eine Filterbasis. Sei $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter, der $\mathscr{B}$ enthält. Dann ist wie in Aufgabenteil (c) einerseits $\lim \mathscr{U} = x$, andererseits aber $\mathscr{U}$ nicht der von x erzeugte Hauptultrafilter, also $\mathscr{U}$ ein Ultrafilter, der kein Hauptultrafilter ist, im Widerspruch zur Annahme, dass X ein Hauptultrafilterraum ist. Also ist jede einelementige Menge in X offen, was bedeutet, dass X die diskrete Topologie trägt. Weil X nach Aufgabenteil (d) zudem kompakt ist, muss X endlich sein.

41. Sei $\Omega \neq \emptyset$ eine Menge. Für jedes $\omega \in \Omega$ sei $A_\omega \neq \emptyset$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, und A_ω sei mit der Spurtopologie bezüglich $\mathbb{R}$ versehen. Wir versehen $\mathcal{F}(\Omega)$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz und

$$\mathcal{P} := \{u \in \mathscr{F}(\Omega) : u(\omega) \in A_\omega \text{ für alle } \omega \in \Omega\}$$

mit der zugehörigen Spurtopologie. Zeige, dass $\mathcal{P}$ dann homöomorph zum Produktraum $\prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$, versehen mit der Produkttopologie, ist, und schlussfolgere, dass die Menge $\mathcal{K}$ in Aufgabe 30 kompakt ist! (2)

Lösung: Wir betrachten die Abbildung $I\colon \mathcal{P} \to \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$, $f \mapsto (f(\omega))_{\omega\in\Omega}$. Offenbar ist I bijektiv. Wir müssen noch zeigen, dass I und I^{-1} stetig sind.

Sei $f \in \mathcal{P}$ und U eine Umgebung von $y := I(f) \in \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$. Dann gibt es eine endliche Teilmenge I von Ω und offene Mengen O_ω, $\omega \in I$, in A_ω mit $y_\omega \in O_\omega$ und

$$B := \Big\{z \in \prod_{\omega\in\Omega} : z_\omega \in O_\omega \ \forall \omega \in I\Big\} \subset U.$$

Also ist O_ω von der Form $U_\omega \cap A_\omega$ für eine offene Menge $U_\omega \subset \mathbb{R}$, und nach Verkleinern von O_ω können wir $U_\omega = (y_\omega - \varepsilon, y_\omega + \varepsilon)$ mit einem von ω unabhängigen $\varepsilon > 0$ annehmen. Dann ist

$$I^{-1}(U) \supset I^{-1}(B) = \big\{g \in \mathcal{P} : g(\omega) \in (y_\omega - \varepsilon, y_\omega + \varepsilon)\big\} = B(f, I, \varepsilon) \cap \mathcal{P}$$

eine Umgebung von f in der Spurtopologie von $\mathcal{P}$. Das zeigt, dass I in f stetig ist. Weil f beliebig war, folgt, dass I stetig ist.

Sei nun umgekehrt $y \in \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega$ beliebig und U eine Umgebung von $f := I^{-1}(y)$ in $\mathcal{P}$. Dann gibt es eine endliche Menge $I \subset \Omega$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $B(f, I, \varepsilon) \cap \mathcal{P} \subset U$. Dann ist

$$\begin{aligned}(I^{-1})^{-1}(U) = I(U) &\supset \Big\{z \in \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega : |z_\omega - f(\omega)| < \varepsilon\Big\} \\ &= \Big\{z \in \prod_{\omega\in\Omega} A_\omega : z_\omega \in (y_\omega - \varepsilon, y_\omega + \varepsilon) \cap A_\omega\Big\}\end{aligned}$$

nach Definition der Produkttopologie eine offene Umgebung von y. Also ist I^{-1} stetig in y. Weil y beliebig war, ist I^{-1} stetig.

In Aufgabe 30 war die Menge $\mathcal{K}$ also bis auf Homöomorphie die Menge

$$\mathcal{K} \cong \prod_{x\in[0,1]} [0,1] = [0,1]^{[0,1]},$$

also als Produkt kompakter Räume nach dem Satz von Tychonov selbst wieder kompakt als topologischer Raum und somit eine kompakte Teilmenge von $\mathcal{F}([0,1])$.

Bemerkung: Diese Aufgabe wurde hier viel ausführlicher nachgerechnet, als dies für die volle Punktzahl erwartet worden wäre; es ist beinahe offensichtlich, dass die Topologien unter dieser Identifikation der Räume zusammenfallen.