Universität Ulm

Dienstag, 22.02.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2009/10
Punktzahl: 100

Elemente der Topologie: Klausur 1

1. Zeigen Sie, dass in einem Hausdorff-Raum jede einelementige Menge abgeschlossen ist! (10)

2. Sei $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz versehen. Sei $n \in \mathbb{N}$, und seien $x_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$. Zeigen Sie, dass die Menge $O := \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : f(x_i) > 0 \; \forall i = 1, \ldots, n\}$ offen ist! (10)

3. Sei M ein metrischer Raum und K eine kompakte Teilmenge von M. Zeigen Sie, dass K beschränkt ist! (10)
Hinweis: $A \subset M$ heißt *beschränkt*, wenn es $x \in M$ und $R \geq 0$ mit $A \subset B(x, R)$ gibt.

4. Sei $\{0,1\}$ mit der diskreten Topologie und $X := \{0,1\}^{\mathbb{N}} := \prod_{n=1}^{\infty}\{0,1\}$ mit der Produkttopologie versehen. Sei $A \subset X$ zusammenhängend. Zeigen Sie, dass A aus höchstens einem Element besteht. (10)
Bemerkung: Man nennt Räume mit dieser Eigenschaft *total unzusammenhängend.*

5. *Ein-Punkt-Kompaktifizierung:* Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ seien mit der üblichen euklidischen Topologie versehen. Sei $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Es sei

$$\hat{\mathscr{T}} := \big\{O \subset \hat{\mathbb{C}} : \infty \notin O \text{ und } O \text{ offen in } \mathbb{C}\big\} \cup \big\{O \subset \hat{\mathbb{C}} : \infty \in O \text{ und } O^c \text{ kompakt in } \mathbb{C}\big\}.$$

Zeigen Sie:

(a) $\hat{\mathscr{T}}$ ist eine Topologie auf $\hat{\mathbb{C}}$. (10)

(b) $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathscr{T}})$ ist ein Hausdorff-Raum. (10)

(c) $(\hat{\mathbb{C}}, \hat{\mathscr{T}})$ ist kompakt. (10)

6. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten, aufgefasst als Funktionen von der Menge $\mathbb{R}$ in den topologischen Raum $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die euklidische Topologie die Initialtopologie von $\mathcal{P}$ ist! (10)

7. Entscheiden Sie (ohne Begründung), ob folgende Aussagen richtig oder falsch sind, und kreuzen Sie die entsprechende Antwort im Prüfungsbogen an: (20)

(1) Erfüllt ein metrischer Raum das erste Abzählbarkeitsaxiom, so ist er separabel.

(2) Jede nicht-leere Menge X, versehen mit der diskreten Topologie, erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom.

(3) Jede Teilmenge von $\mathbb{Q}$, die bezüglich der euklidischen Topologie ein vollständiger metrischen Raum ist, ist als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ abgeschlossen.

(4) Ist M ein metrischer Raum und A eine abzählbare Teilmenge von M, so ist A abgeschlossen.

(5) Ist X ein separabler Hausdorff-Raum und Y eine nicht-leere Teilmenge von X, so ist Y bezüglich der relativen Topologie separabel.

(6) Ist X ein Hausdorff-Raum, $K \subset X$ kompakt und A eine nicht-leere Teilmenge von K, so ist auch A kompakt.

(7) In einem topologischen Raum X ist eine Menge A genau dann offen, wenn $A \cap \partial A = \emptyset$ gilt.

(8) In einem kompakten metrischen Raum ist jeder Ultrafilter konvergent.

(9) Die Menge $\{u \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) : |u(x)| \leq |x| \text{ für alle } x \in \mathbb{R}\}$ ist kompakt in $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ bezüglich der Topologie der punktweisen Konvergenz.

(10) Ist K ein kompakter Hausdorff-Raum und $A \subset K$ abgeschlossen, so ist die Abbildung $f \mapsto f|_A$ surjektiv von $\mathrm{C}(K)$ nach $\mathrm{C}(A)$.