Universität Ulm

Donnerstag, 28.10.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 1

1. Sei X ein Banachraum und $(x_n) \subset X$. Die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ sei konvergent. Zeige, dass dann $x_n \to 0$ gilt! (2)

Lösung: Bezeichnet S_n die n.te Partialsumme, so ist $x_n = S_n - S_{n-1}$. Nach dem Cauchy-kriterium wird dieser Ausdruck für hinreichend großes n in Norm beliebig klein, was gerade die Behauptung ist.

2. Sei $c \coloneqq \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : (x_n) \text{ konvergiert}\}$. Zeige, dass c mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachraum ist! (2)

Lösung: Wir müssen nur zeigen, dass c ein abgeschlossener Unterraum von ℓ^∞ ist. Offenbar ist c ein Unterraum. Sei $(x^m) \subset c$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $x \in \ell^\infty$. Wir müssen $x \in c$ zeigen. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wähle m so groß, dass $\|x - x^m\|_\infty \le \varepsilon$ ist. Wegen $x^m \in c$ gibt es i_0 mit $|x_i^m - x_j^m| \le \varepsilon$ für alle $i, j \ge i_0$. Dann ist

$$|x_i - x_j| \le |x_i - x_i^m| + |x_i^m - x_j^m| + |x_j^m - x_j| \le 3\varepsilon$$

für $i, j \ge i_0$. Also ist x eine Cauchyfolge und somit $x \in c$.

3. Seien E und F normierte Räume und $T\colon E \to F$ linear. Zeige:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent: (5)

(i) T ist stetig.
(ii) T ist stetig in 0.
(iii) Es gibt $c \ge 0$ mit $\|Tx\| \le c\|x\|$ für alle $x \in E$.
(iv) Es gibt $c \ge 0$ mit $\|Tx\| \le c$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| \le 1$.
(v) Es gibt $c \ge 0$ mit $\|Tx\| \le c$ für alle $x \in E$ mit $\|x\| = 1$.

Ist eine der obigen Bedingungen erfüllt, so nennt man T auch *beschränkt* und schreibt

$$\|T\| \coloneqq \inf\big\{c \ge 0 : \|Tx\| \le c\|x\| \text{ für alle } x \in E\big\}.$$

Tipp: Für die „(ii) ⇔ (iii)“ bietet sich die ε-δ-Definition der Stetigkeit an. „(i) ⇔ (ii)“ und „(iii) ⇔ (iv) ⇔ (v)“ folgen aus der Linearität von T.

Lösung: „(i) ⇔ (ii)“ Ist T stetig, so insbesondere in 0. Sei T stetig in 0 und $x_n \to x$. Dann gilt $T(x_n - x) \to 0$ und somit $Tx_n \to Tx$.

„(iii) ⇔ (iv) ⇔ (v)“ Ist $\|Tx\| \le c$ für $\|x\| = 1$, so gilt für $x \ne 0$

$$\|Tx\| = \Big\|\|x\| T\tfrac{x}{\|x\|}\Big\| \le c\|x\|.$$

Für $x = 0$ ist die Abschätzung trivial. Die anderen Implikationen sind klar.

„(ii) ⇔ (iii)“ Ist T stetig in 0, so gibt es zu $\varepsilon = 1$ ein $\delta > 0$ mit $\|Tx\| \le 1$ für $\|x\| < \delta$. Dann ist $\|Tx\| \le \frac{1}{\delta}\|x\|$ für alle $x \in E$. Ist umgekehrt $\|Tx\| \le c\|x\|$ (ohne Einschränkung $c > 0$) für alle $x \in E$, so kann man zu $\varepsilon > 0$ den Wert $\delta \coloneqq \frac{\varepsilon}{c}$ wählen.

(b) Es gilt $\|Tx\| \le \|T\|\,\|x\|$ für alle $x \in E$. (2)

Lösung: Sei c_n eine Folge in $\{c \ge 0 : \|Tx\| \le c\|x\| \text{ für alle } x \in E\}$ mit $c_n \to \|T\|$. Für festes $x \in E$ gilt dann $\|Tx\| \le c_n\|x\|$ für alle n. Geht man zum Grenzwert über, folgt die Behauptung.

(c) Definiere $s \coloneqq \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$. Der Operator T ist genau dann beschränkt, wenn $s < \infty$ ist. In diesem Fall gilt $\|T\| = s$. (2)

Lösung: Diese äquivalente Beschreibung der Stetigkeit ist lediglich eine Umformulierung von (iv). Es ist also nur $\|T\| = s$ zu zeigen. Die Abschätzung $s \leq \|T\|$ ist nach dem vorigen Aufgabenteil klar.

Sei nun $c < \|T\|$. Nach Definition von $\|T\|$ gibt es dann $x \in E$ mit $\|Tx\| > c\|x\|$. Insbesondere ist $x \neq 0$. Nach Reskalierung darf man also $\|x\| = 1$ annehmen. Dann ist $\|Tx\| > c$ und somit $s > c$ für alle $c < \|T\|$, also $s \geq \|T\|$.

4. Sei X ein Banachraum. Wir schreiben

$$\ell^1_X \coloneqq \Big\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : \|\mathbf{x}\|_1 \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty\Big\}$$

und

$$\mathrm{BV}_X(\mathbb{N}) \coloneqq \Big\{\mathbf{x} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X : V(\mathbf{x}) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1} - x_n\| < \infty\Big\}.$$

Für $\mathbf{x} \in \mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ setzen wir $\|\mathbf{x}\|_{\mathrm{BV}} \coloneqq \|x_1\| + V(\mathbf{x})$. Zeige, dass ℓ^1_X versehen mit $\|\cdot\|_1$ und $\mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ versehen mit $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$ jeweils ein Banachraum ist! (7)

Tipp: Rechne mit der Definition nach, dass $(\ell^1_X, \|\cdot\|_1)$ ein Banachraum ist. Gib dann einen isometrischen Isomorphismus zwischen den beiden Räumen an, um zu schlussfolgern, dass auch $(\mathrm{BV}_X(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\mathrm{BV}})$ ein Banachraum ist.

Lösung: Die Vektorraum- und Normaxiome sind für ℓ^1_X und $\|\cdot\|_1$ unmittelbar klar. Es ist also nur die Vollständigkeit zu zeigen. Sei dazu $(\mathbf{x}^m)$ eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_1$. Wegen $\|x_n^{m_1} - x_n^{m_2}\| \leq \|\mathbf{x}^{m_1} - \mathbf{x}^{m_2}\|_1$ ist dann (x_n^m) für jedes n eine Cauchyfolge in X und besitzt daher einen Grenzwert x_n. Setze $\mathbf{x} \coloneqq (x_n)$.

Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt m_0 mit

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n^m - x_n^k\|_1 \leq \|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}^k\|_1 \leq \varepsilon$$

für alle N und alle $m, k \geq m_0$. Da dies eine endliche Summe ist, kann man zum Grenzwert für $k \to \infty$ übergehen und erhält

$$\sum_{n=1}^{N} \|x_n^m - x_n\| \leq \varepsilon$$

für $m \geq m_0$. Da dies für alle N richtig ist, konvergiert die entsprechende Reihe und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^m - x_n\| \leq \varepsilon$$

für $m \geq m_0$. Insbesondere ergibt sich

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - x_n^{m_0}\| + \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^{m_0}\| < \infty,$$

also $\mathbf{x} \in \ell^1_X$, aber genauer sogar $\|\mathbf{x}^m - \mathbf{x}\|_1 \leq \varepsilon$ für $m \geq m_0$, also $\mathbf{x}^m \to \mathbf{x}$.

Betrachte nun $(T\mathbf{x})_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} x_k$ als lineare Funktion von ℓ^1_X in den Raum aller X-wertigen Folgen. Es ist $(T\mathbf{x})_{n+1} - (T\mathbf{x})_n = x_{n+1}$ und somit

$$V(T\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_{n+1}\| = \|\mathbf{x}\|_1 - \|x_1\|.$$

Also bildet T den Raum ℓ^1_X nach $\mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ ab, und es gilt $\|T\mathbf{x}\|_{\mathrm{BV}} = \|\mathbf{x}\|_1$. Für eine beliebige Folge $\mathbf{y} \in \mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ definiert $x_1 \coloneqq y_1$ und $x_{n+1} \coloneqq y_{n+1} - y_n$ ein Element $\mathbf{x} \in \ell^1_X$ mit $T\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Also ist T surjektiv nach $\mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$. Als Bild einer linearen Abbildung ist $\mathrm{BV}_X(\mathbb{N})$ ein Unterraum und somit ein Vektorraum. Weil T bijektiv und normerhaltend ist, überträgen sich die Eigenschaften der Norm $\|\cdot\|_1$ auf $\|\cdot\|_{\mathrm{BV}}$, inklusive der Tatsache, dass der Raum bezüglich dieser Norm vollständig ist.