Universität Ulm

Donnerstag, 04.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 2

5. Seien E und F normierte Räume und $T\colon E \to F$ linear und bijektiv. Zeige, dass die Abbildung T^{-1} ist genau dann stetig ist, wenn es ein $\alpha > 0$ mit $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

6. Seien X, Y und Z normierte Räume, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $x \in X$ und $(S_n) \subset \mathscr{L}(Y,Z)$, $(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ und $(x_n) \subset X$ beschränkte Folgen. Zeige:

(a) $S_n \to S$, $T_n \to T \Rightarrow S_nT_n \to ST$ (2)

(b) $S_n \to_s S$, $T_n \to_s T \Rightarrow S_nT_n \to_s ST$ (2)
Hinweis: Wir schreiben $T_n \to_s T$, falls (T_n) stark gegen T konvergiert, also falls $T_nx \to Tx$ für alle $x \in X$ gilt, und analog für (S_n).

(c) $T_n \to_s T$, $x_n \to x \Rightarrow T_nx_n \to Tx$ (2)

7. Sei X ein normierter Raum und D ein dichter Unterraum, der mit der induzierten Norm versehen wird. Zeige, dass der Einschränkungsoperator $R\colon X' \to D'$, $\varphi \mapsto \varphi|_D$ ein isometrischer Isomorphismus ist, also bijektiv mit $\|R\varphi\| = \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in X'$. (2)

8. Zeige, dass der Raum c_0 der (komplexwertigen) Nullfolgen und der Raum c der (komplexwertigen) konvergenten Folgen isomorph sind. (2)

9. Sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeige:

(a) Ist $y \in \ell^{p'}$, so definiert $\varphi_y(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{y}_n x_n$ ein Funktional $\varphi_y \in (\ell^p)'$ mit Norm $\|\varphi_y\| = \|y\|_{p'}$. (3)

(b) Ist $\varphi \in (\ell^p)'$, so gibt es genau ein $y \in \ell^{p'}$ mit $\varphi = \varphi_y$. (5)

Bemerkung: Wir haben hier einen natürlichen isometrischen Isomorphismus zwischen $\ell^{p'}$ und $(\ell^p)'$ gefunden, nämlich $y \mapsto \varphi_{\overline{y}}$; beachte, dass $y \mapsto \varphi_y$ nicht linear ist! Man schreibt daher auch $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ und identifiziert Funktionale auf ℓ^p mit Elementen von $\ell^{p'}$.
Information: Die Aussage bleibt für $p = 1$ richtig. Für $p = \infty$ ist sie allerdings falsch, wie wir im Laufe der Vorlesung noch sehen werden.