Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 2

5. Seien E und F normierte Räume und $T\colon E \to F$ linear und bijektiv. Zeige, dass die Abbildung T^{-1} ist genau dann stetig ist, wenn es ein $\alpha > 0$ mit $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

Lösung: Es gebe solch ein $\alpha > 0$. Sei $y \in F$. Wähle $x \in E$ mit $Tx = y$. Dann gilt

$$\|T^{-1}y\| = \|x\| \leq \tfrac{1}{\alpha}\|Tx\| = \tfrac{1}{\alpha}\|y\|.$$

Daraus folgt, dass T^{-1} stetig ist.

Ist umgekehrt T^{-1} stetig, so ist

$$\|x\| = \|T^{-1}Tx\| \leq \|T^{-1}\|\,\|Tx\|,$$

woraus die Behauptung mit $\alpha = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$ folgt. Hier dürfen wir $\|T^{-1}\| \neq 0$ annehmen, da sonst $T^{-1} = 0$ ist, was nur im trivialen Fall $E = F = \{0\}$ möglich ist.

6. Seien X, Y und Z normierte Räume, $S \in \mathscr{L}(Y,Z)$, $T \in \mathscr{L}(X,Y)$, $x \in X$ und $(S_n) \subset \mathscr{L}(Y,Z)$, $(T_n) \subset \mathscr{L}(X,Y)$ und $(x_n) \subset X$ beschränkte Folgen. Zeige:

(a) $S_n \to S$, $T_n \to T \Rightarrow S_nT_n \to ST$ (2)

Lösung: Sei hier und in den folgenden Aufgabenteilen M so gewählt, dass $\|S_n\| \leq M$ und $\|T_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann gilt

$$\|S_nT_n - ST\| \leq \|S_n(T_n - T)\| + \|(S_n - S)T\| \leq M\|T_n - T\| + \|S_n - S\|M \to 0.$$

(b) $S_n \to_s S$, $T_n \to_s T \Rightarrow S_nT_n \to_s ST$ (2)

Hinweis: Wir schreiben $T_n \to_s T$, falls (T_n) stark gegen T konvergiert, also falls $T_nx \to Tx$ für alle $x \in X$ gilt, und analog für (S_n).

Lösung: Sei $x \in X$. Dann ist

$$\|S_nT_nx - STx\| \leq \|S_n(T_n - T)x\| + \|(S_n - S)Tx\| \leq M\|T_nx - Tx\| + \|S_nTx - STx\|.$$

Der erste Summand geht wegen $T_n \to_s T$, der zweite wegen $S_n \to_s S$ gegen 0.

(c) $T_n \to_s T$, $x_n \to x \Rightarrow T_nx_n \to Tx$ (2)

Lösung: Es gilt

$$\|T_nx_n - Tx\| \leq \|T_n(x_n - x)\| + \|(T_n - T)x\| \leq M\|x_n - x\| + \|T_nx - Tx\| \to 0.$$

7. Sei X ein normierter Raum und D ein dichter Unterraum, der mit der induzierten Norm versehen wird. Zeige, dass der Einschränkungsoperator $R\colon X' \to D'$, $\varphi \mapsto \varphi|_D$ ein isometrischer Isomorphismus ist, also bijektiv mit $\|R\varphi\| = \|\varphi\|$ für alle $\varphi \in X'$. (2)

Lösung: Die Linearität von R ist klar. Nach dem Fortsetzungssatz für beschränkte lineare Operatoren gibt es zu jedem $\psi \in D'$ genau ein $\varphi \in X'$ mit $R\varphi = \psi$, und es gilt $\|\varphi\| = \|\psi\|$. Dies bedeutet gerade, dass R surjektiv (Existenz von φ), injektiv (Eindeutigkeit von φ) und isometrisch ($\|\varphi\| = \|\psi\|$) ist, also ein isometrischer Isomorphismus.

8. Zeige, dass der Raum c_0 der (komplexwertigen) Nullfolgen und der Raum c der (komplexwertigen) konvergenten Folgen isomorph sind. (2)

Lösung: Durch $(Tx)_n \coloneqq x_{n+1} + x_1$ für $n \in \mathbb{N}$ wird ein linearer Operator von c_0 nach c definiert. Es ist

$$\|T(x_n)\|_\infty \le \|x\|_\infty + |x_1| \le 2\|x\|_\infty$$

und somit $\|T\| \le 2$. Insbesondere ist T stetig.

Definiere $(Sy)_1 \coloneqq \lim y$ und $(Sy)_{n+1} \coloneqq y_n - \lim y$ für $y \in c$. Dann ist $\|S\| \le 2$ und $STx = x$, $TSy = y$ für alle $x \in c_0$, $y \in c$. Dies zeigt, dass T invertierbar, also ein Isomorphismus zwischen c_0 und c, ist.

9. Sei $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeige:

(a) Ist $y \in \ell^{p'}$, so definiert $\varphi_y(x) \coloneqq \sum_{n=1}^\infty \overline{y}_n x_n$ ein Funktional $\varphi_y \in (\ell^p)'$ mit Norm $\|\varphi_y\| = \|y\|_{p'}$. (3)

Lösung: Nach der Hölder-Ungleichung ist

$$|\varphi_y(x)| \le \|y\|_{p'}\|x\|_p$$

für alle $x \in \ell^p$, und insbesondere konvergiert die Reihe in der Definition von φ_y sogar absolut. Das zeigt die Stetigkeit von φ_y und $\|\varphi_y\| \le \|y\|_{p'}$. Die Gleichheit der beiden Normen kann man erhalten, indem man ein passendes $x \in \ell^p$ einsetzt. Sie folgt aber auch aus dem unten gegebenen Beweis des zweiten Aufgabenteils.

(b) Ist $\varphi \in (\ell^p)'$, so gibt es genau ein $y \in \ell^{p'}$ mit $\varphi = \varphi_y$. (5)

Lösung: Definiere $y_n \coloneqq \overline{\varphi(e_n)}$. Dies ist die einzige Wahl von y_n, für die $\varphi_y = \varphi$ gelten kann, was bereits die Eindeutigkeit zeigt. Für $N \in \mathbb{N}$ gilt nun mit der Konvention $|a|^{p'-2}a = 0$ für $a = 0$

$$\sum_{n=1}^N |y_n|^{p'} = \sum_{n=1}^N |y_n|^{p'-2} y_n \varphi(e_n) = \varphi\Big(\sum_{n=1}^N |y_n|^{p'-2} y_n e_n\Big) \le \|\varphi\| \Big(\sum_{n=1}^N |y_n|^{p(p'-1)}\Big)^{1/p}.$$

Beachtet man $p(p'-1) = p'$ und $1 - \frac{1}{p} = \frac{1}{p'}$, so erhält man durch Teilen

$$\Big(\sum_{n=1}^N |y_n|^{p'}\Big)^{1/p'} \le \|\varphi\|.$$

Weil dies für jedes N richtig ist, folgt $y \coloneqq (y_n) \in \ell^{p'}$ mit $\|y\|_{p'} \le \|\varphi\|$. Nach Definition ist $\varphi_y(e_n) = \varphi$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und wegen Dichtheit somit $\varphi_y = \varphi$. Insbesondere haben wir $\|y\|_{p'} \le \|\varphi\| = \|\varphi_y\|$ gezeigt, was für den vorigen Aufgabenteil noch zu zeigen war.

Bemerkung: Wir haben hier einen natürlichen isometrischen Isomorphismus zwischen $\ell^{p'}$ und $(\ell^p)'$ gefunden, nämlich $y \mapsto \varphi_{\overline{y}}$; beachte, dass $y \mapsto \varphi_y$ nicht linear ist! Man schreibt daher auch $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ und identifiziert Funktionale auf ℓ^p mit Elementen von $\ell^{p'}$.
Information: Die Aussage bleibt für $p = 1$ richtig. Für $p = \infty$ ist sie allerdings falsch, wie wir im Laufe der Vorlesung noch sehen werden.