Universität Ulm

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka

Donnerstag, 11.11.2010

Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

# Funktionalanalysis: Blatt 3

**10.** Zwei normierte Räume $X$ und $Y$ heißen *isometrisch isomorph*, falls es einen isometrischen Isomorphismus $T\colon X \to Y$ gibt. Zeige:

(a) $c_{00}'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$. (2)
**Hinweis:** $c_{00}$ bezeichnet in dieser Vorlesung immer den Raum der abbrechenden Folgen, also der Folgen $(x_n)$, für die es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$ gibt. In dieser Aufgabe sei $c_{00}$ mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

(b) $c_0'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$. (2)

(c) $c'$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^1$. (4)

(d) Keine zwei der Räume $c_{00}$, $c_0$ und $c$ sind zueinander isometrisch isomorph. (4)

**11.** Auf $\mathbb{R}^N$ definieren wir die Normen $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{1/p}$. Laut Vorlesung gibt es für alle $p, q \in [1, \infty]$ Konstanten $\alpha_{N,p,q} > 0$ und $\beta_{N,p,q} > 0$ mit

$$\alpha_{N,p,q}\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta_{N,p,q}\|x\|_p$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Bestimme die optimalen Konstanten in dieser Abschätzung! Wie verhalten sich diese für $N \to \infty$? (2)

**12.** Zeige, dass es ein $\varphi \in c_0'$ gibt mit $|\varphi(x)| < \|\varphi\|\,\|x\|$ für alle $x \in c_0$, $x \neq 0$! Schlussfolgere hieraus, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in c_0 : \|x\|_\infty \leq 1\}$ nicht kompakt ist! (3)

**13.** Sei $X$ ein unendlichdimensionaler Banachraum und $(b_\alpha)_{\alpha\in I}$ eine Basis von $X$. Jedes $x \in X$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{\alpha\in I} \lambda_\alpha(x) b_\alpha$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren, also genau eine Darstellung, bei der nur für endlich viele $\alpha \in I$ der Koeffizient $\lambda_\alpha(x)$ nicht verschwindet. Dadurch werden lineare Funktionen $\lambda_\alpha\colon X \to \mathbb{C}$ definiert. Zeige, dass mindestens eines der linearen Funktionale $\lambda_\alpha$ unstetig ist. (3)