Universität Ulm

Donnerstag, 11.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 3

10. Zwei normierte Räume X und Y heißen *isometrisch isomorph*, falls es einen isometrischen Isomorphismus $T\colon X \to Y$ gibt. Zeige:

(a) c_{00}' ist isometrisch isomorph zu ℓ^1. (2)

Hinweis: c_{00} bezeichnet in dieser Vorlesung immer den Raum der abbrechenden Folgen, also der Folgen (x_n), für die es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n = 0$ für alle $n \geq n_0$ gibt. In dieser Aufgabe sei c_{00} mit der Norm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.

Lösung: Für $y \in \ell^1$ definiere $\varphi_y(x) \coloneqq \sum_{n=1}^\infty y_n x_n$ für $x \in c_{00}$. Offenbar ist dann $|\varphi_y(x)| \leq \|y\|_1 \|x\|_\infty$, also $\varphi_y \in c_{00}'$ mit $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_1$.
Sei nun $\varphi \in c_{00}'$ beliebig. Setze $y_n \coloneqq \varphi(e_n)$. Dann ist mit $\operatorname{sgn}(z) \coloneqq \frac{z}{|z|}$ für $z \neq 0$ und $\operatorname{sgn}(0) \coloneqq 0$

$$\sum_{n=1}^N |y_n| = \varphi\Big(\sum_{n=1}^N \overline{\operatorname{sgn}(y_n)} e_n\Big) \leq \|\varphi\|$$

für alle $N \in \mathbb{N}$, also $y \coloneqq (y_n) \in \ell^1$ mit $\|y\|_1 \leq \|\varphi\|$. Weil die Folge (e_n) ganz c_{00} aufspannt, folgt $\varphi_y = \varphi$ und insbesondere $\|y\|_1 \leq \|\varphi_y\|$. Die Eindeutigkeit von y ist klar. Also ist $y \mapsto \varphi_y$ ein isometrischer Isomorphismus von ℓ^1 nach c_{00}'.

(b) c_0' ist isometrisch isomorph zu ℓ^1. (2)

Lösung: Dies folgt aus dem vorigen Aufgabenteil und Aufgabe 7.

(c) c' ist isometrisch isomorph zu ℓ^1. (4)

Lösung: Für $y \in \ell^1$ definiere

$$\varphi_y(x) \coloneqq y_1 \lim x + \sum_{n=1}^\infty y_{n+1} x_n$$

für $x \in c$. Wegen $|\lim x| \leq \|x\|_\infty$ ist dann $\varphi_y \in c'$ mit $\|\varphi_y\| \leq \|y\|_1$. Andererseits gilt mit $x_n \coloneqq \overline{\operatorname{sgn}(y_{n+1})}$ für $n \leq N$ und $x_n \coloneqq \overline{\operatorname{sgn}(y_1)}$ für $n > N$ auch $x \in c$ mit $\|x\|_\infty = 1$ und

$$|\varphi_y(x)| = \Big||y_1| + \sum_{n=1}^N |y_{n+1}| + \sum_{n=N+1}^\infty y_{n+1}\overline{\operatorname{sgn}(y_1)}\Big| \geq \|y\|_1 - 2\sum_{n=N+1}^\infty |y_{n+1}|.$$

Weil dies für jedes $N \in \mathbb{N}$ richtig ist, folgt $\|\varphi_y\| \geq \|y\|_1$, also $\|\varphi_y\| = \|y\|_1$. Also ist $y \mapsto \varphi_y$ isometrisch von ℓ^1 nach c'.
Sei nun $\varphi \in c'$ beliebig. Dann ist $\varphi|_{c_0} \in c_0'$. Es gibt also nach dem vorigen Aufgabenteil $(y_{n+1}) \in \ell^1$ mit

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty y_{n+1} x_n$$

für alle $x \in c_0$. Setze $y_1 \coloneqq \varphi(\mathbb{1}) - \sum_{n=1}^\infty y_{n+1}$. Dann ist $y \coloneqq (y_n) \in \ell^1$ und für beliebiges $x \in c$ gilt

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(x - \mathbb{1}\lim x) + \lim x \cdot \varphi(\mathbb{1})\\ &= \sum_{n=1}^\infty y_{n+1}(x_n - \lim x) + \Big(y_1 + \sum_{n=1}^\infty y_{n+1}\Big)\lim x = \varphi_y(x).\end{aligned}$$

Also ist $\varphi = \varphi_y$ und somit $y \mapsto \varphi_y$ surjektiv.

(d) Keine zwei der Räume c_{00}, c_0 und c sind zueinander isometrisch isomorph. (4)

Lösung: Der Raum c_{00} ist im Gegensatz zu c_0 und c nicht vollständig und kann daher nicht isomorph zu einem der beiden Räume sein, insbesondere also auch nicht isometrisch isomorph.

Wir zeigen nun, dass auch c_0 und c nicht isometrisch isomorph sind. Wir nehmen die Existenz eines isometrischen Isomorphismus $T\colon c_0 \to c$ an. Seien (e_n) die Einheitsvektoren in c_0 und $f_n := Te_n$. Dann ist $\|f_n\|_\infty = 1$ und daher gibt es einen Index $k(n)$ mit $|f_{n,k(n)}| > 1 - \frac{1}{n}$. Für alle $m \neq n$ und alle $\vartheta_{m,n} \in \mathbb{C}$ mit $|\vartheta_{m,n}| = 1$ gilt

$$\|f_n + \vartheta_{n,m} f_m\| = \|e_n + \vartheta_{m,n} e_m\| = 1.$$

Daher ist $|f_{m,k(n)}| \leq \frac{1}{n}$ für $m \neq n$ und insbesondere $k(n) \neq k(m)$ für $m \neq n$, zumindest für $n, m \geq 2$. Also gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes f_m unendlich viele Indizes i mit $|f_{m,i}| \leq \varepsilon$; wegen $f_m \in c$ folgt hieraus $f_m \in c_0$. Also bildet T den in c_0 dichten Unterraum c_{00} der abbrechenden Folgen nach $c_0 \subset c$ ab. Wegen Stetigkeit folgt $Tc_0 \subset c_0$ im Widerspruch zur Surjektivität von T.

Alternative Lösung: Zu jedem Vektor $x \in c_0$ mit $\|x\| \leq 1$ gibt es Vektoren $y \neq z$ in c_0 mit $\|y\| \leq 1$, $\|z\| \leq 1$ und $x = \frac{1}{2}(y+z)$. Wähle beispielsweise $y = x + \varepsilon e_n$ und $z = x - \varepsilon e_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|x_n| < \frac{1}{2}$ und $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

Nehmen wir es, es gibt einen isometrischen Isomorphismus T von c_0 nach c. Setze $x := T^{-1}\mathbb{1}$ und wähle $y \neq z$ in c_0 wie oben. Dann ist $\|Ty\| \leq 1$, $\|Tz\| \leq 1$ und $\frac{1}{2}(Ty + Tz) = Tx = \mathbb{1}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist dann $(Ty)_n + (Tz)_n = 2$ und $|(Ty)_n| \leq 1$ und $|(Tz)_n| \leq 1$, was nur für $(Ty)_n = 1 = (Tz)_n$ möglich ist. Also ist $Ty = Tz$ und $y \neq z$ im Widerspruch zur Injektivität von T.

Bemerkung: Wir haben in der alternativen Lösung eigentlich nachgerechnet, dass die abgeschlossene Einheitskugel von c_0 keine Extremalpunkte besitzt, dass $\mathbb{1}$ ein Extremalpunkt der abgeschlossenen Einheitskugel von c ist, und dass ein isometrischer Isomorphismus von X nach Y Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel von X auf Extremalpunkte der abgeschlossenen Einheitskugel von Y abbildet. Die Definition von Extremalpunkten und weitere Eigenschaften kann man im Buch *Funktionalanalysis* von Dirk Werner in Abschnitt VIII.4 nachlesen.

11. Auf $\mathbb{R}^N$ definieren wir die Normen $\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^N |x_k|^p\right)^{1/p}$. Laut Vorlesung gibt es für alle $p, q \in [1, \infty]$ Konstanten $\alpha_{N,p,q} > 0$ und $\beta_{N,p,q} > 0$ mit

$$\alpha_{N,p,q}\|x\|_p \leq \|x\|_q \leq \beta_{N,p,q}\|x\|_p$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Bestimme die optimalen Konstanten in dieser Abschätzung! Wie verhalten sich diese für $N \to \infty$? (2)

Lösung: Es ist

$$\alpha_{N,p,q} = \min_{\|x\|_2=1} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} = \left(\max_{\|x\|_2=1} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}\right)^{-1}$$

und

$$\beta_{N,p,q} = \max_{\|x\|_2=1} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} = \left(\min_{\|x\|_2=1} \frac{\|x\|_p}{\|x\|_q}\right)^{-1}.$$

Dies zeigt, dass es tatsächlich optimale Konstanten gibt, und zudem folgt $\alpha_{N,p,q} = \beta_{N,q,p}^{-1}$.

Sei zuerst $1 \leq p \leq q < \infty$. Dann ist nach der Hölderungleichung

$$\sum_{n=1}^N |x_n|^p \leq \Big(\sum_{n=1}^N |x_n|^q\Big)^{p/q} N^{(q-p)/q}.$$

Daraus ergibt sich $\|x\|_p \le N^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|x\|_q$ für alle $x \in \mathbb{R}^N$, also

$$\alpha_{N,p,q} = \min_{\|x\|_2=1} \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} \ge N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Zudem ist

$$\alpha_{N,p,q} \le \frac{\| \mathbb{1} \|_q}{\| \mathbb{1} \|_p} = \frac{N^{1/q}}{N^{1/p}} = N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}.$$

Andererseits ist wegen $\|x\|_\infty \le \|x\|_p$

$$\sum_{n=1}^N |x_n|^q \le \sum_{n=1}^N |x_n|^p \|x\|_\infty^{q-p} \le \|x\|_p^p \|x\|_p^{q-p} = \|x\|_p^q,$$

was $\beta_{N,p,q} \le 1$ zeigt. Für $x = e_1$ ergibt sich $\beta_{N,p,q} \ge 1$.

Zudem ist $\beta_{N,p,\infty} = 1$ und $\alpha_{N,p,\infty} = N^{1/p}$ einfach zu sehen. Insgesamt ergibt sich unter zusätzlicher Verwendung der Vorüberlegung für $p, q \in [1, \infty]$ mit der Konvention $\frac{1}{\infty} := 0$

$$\alpha_{N,p,q} = \begin{cases} N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & p \le q \\ 1, & p \ge q \end{cases} \qquad \text{und} \qquad \beta_{N,p,q} = \begin{cases} 1, & p \le q \\ N^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}, & p \ge q. \end{cases}$$

Als Grenzwerte erhält man $\alpha_{N,p,q} \to 0$ für $p < q$ und $\alpha_{N,p,q} \to 1$ für $p \ge q$, und ebenso $\beta_{N,p,q} \to 1$ für $p \le q$ und $\beta_{N,p,q} \to \infty$ für $p > q$. Das entspricht der Beobachtung, dass $\ell^p \hookrightarrow \ell^q$ genau für $q \ge p$ gilt.

12. Zeige, dass es ein $\varphi \in c_0'$ gibt mit $|\varphi(x)| < \|\varphi\| \, \|x\|$ für alle $x \in c_0$, $x \ne 0$! Schlussfolgere hieraus, dass die abgeschlossene Einheitskugel $\{x \in c_0 : \|x\|_\infty \le 1\}$ nicht kompakt ist! (3)

Lösung: Sei $y := (y_n) \in \ell^1$ beliebig mit $y_n \ne 0$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, beispielsweise $y_n = \frac{1}{n^2}$. Wir zeigen, dass $\varphi := \varphi_y$ die gewünschte Eigenschaft hat. Ist nämlich $x \in c_0$ und $x \ne 0$, so gibt es $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| \le \frac{1}{2}\|x\|_\infty$ für alle $n \ge n_0$. Also ist

$$\begin{aligned} |\varphi_y(x)| &\le \sum_{n=1}^\infty |y_n| \, |x_n| \le \sum_{n=1}^N |y_n| \, \|x\|_\infty + \sum_{n=N+1}^\infty |y_n| \, \tfrac{1}{2}\|x\|_\infty \\ &= \|y\|_1 \|x\|_\infty - \frac{1}{2}\|x\|_\infty \sum_{n=N+1}^\infty |y_n| < \|y\|_1 \|x\|_\infty, \end{aligned}$$

was wegen $\|\varphi_y\| = \|y\|_1$ gerade die Behauptung ist.

Wäre die Einheitskugel von c_0 kompakt, so besäße die stetige Funktion $|\varphi|$ auf dieser Menge ein Maximum. Es gäbe also $x_0 \in c_0$ mit $\|x_0\|_\infty \le 1$ und

$$|\varphi(x_0)| = \max_{\|x\|_\infty \le 1} |\varphi(x)| = \sup_{\|x\|_\infty \le 1} |\varphi(x)| = \|\varphi\| \ge \|\varphi\| \, \|x_0\|_\infty$$

im Widerspruch zum eben Gezeigten.

13. Sei X ein unendlichdimensionaler Banachraum und $(b_\alpha)_{\alpha \in I}$ eine Basis von X. Jedes $x \in X$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{\alpha \in I} \lambda_\alpha(x) b_\alpha$$

als (endliche) Linearkombination der Basisvektoren, also genau eine Darstellung, bei der nur für endlich viele $\alpha \in I$ der Koeffizient $\lambda_\alpha(x)$ nicht verschwindet. Dadurch werden lineare

Funktionen $\lambda_\alpha \colon X \to \mathbb{C}$ definiert. Zeige, dass mindestens eines der linearen Funktionale λ_α unstetig ist. (3)

Lösung: Wir zeigen, dass sogar höchstens endlich viele dieser Funktionale stetig sind. Sei dazu angenommen, dass es unendlich viele stetige Koordinatenfunktionale gebe, und sei $(\lambda_{\alpha_n})_{n=1}^\infty$ eine abzählbare Auswahl paarweise verschiedener solcher stetigen Funktionale. Definiere

$$S_m \coloneqq \sum_{n=1}^m \frac{b_{\alpha_n}}{n^2\|b_{\alpha_n}\|}.$$

Dann ist die zugehörige Reihe

$$S \coloneqq \sum_{n=1}^\infty \frac{b_{\alpha_n}}{n^2\|b_{\alpha_n}\|}$$

absolut konvergent und daher konvergent. Nach Definition der Koordinatenfunktionale ist $\{\alpha \in I : \lambda_\alpha(S) \neq 0\}$ eine endliche Menge. Andererseits ist $\lambda_{\alpha_n}(S_m) = \frac{1}{n^2\|b_{\alpha_n}\|}$ für $m \geq n$ und daher wegen Stetigkeit

$$\lambda_{\alpha_n}(S) = \lim_{m\to\infty} \lambda_{\alpha_n}(S_m) = \frac{1}{n^2\|b_{\alpha_n}\|} \neq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch.

Alternative Lösung: Sei (α_n) wie oben. Dann sind die Mengen $O_n \coloneqq (\operatorname{Kern} \lambda_{\alpha_n})^c$ offen und dicht in X. Nach dem Satz von Baire ist dann $M \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in X. Insbesondere gibt es $x \in M$. Nach Definition ist dann $\lambda_{\alpha_n}(x) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, ein Widerspruch.