Universität Ulm

Donnerstag, 18.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 4

14. Sei E ein Banachraum und $F \neq \{0\}$ ein normierter Raum. Zeige:

(a) Sei $T \in \mathscr{L}(E,F)$ und (T_n) eine Folge in $\mathscr{L}(E,F)$, die stark gegen T konvergiert. Es gibt $M \geq 0$ mit $\|T_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)
Bemerkung: Vergleiche Aufgabe 6; die Beschränktheit der Folgen ist dort also automatisch gegeben.

(b) Ist E ein separabler Hilbertraum, so ist E genau dann endlichdimensional, wenn jede stark konvergente Folge $(T_n) \subset \mathscr{L}(E,F)$ in der Norm von $\mathscr{L}(E,F)$ konvergiert. (4)
Tipp: Für den Fall, dass E unendlichdimensional ist, betrachte zuerst $\varphi_n \in E'$ definiert durch $\varphi_n(x) \coloneqq (x \mid e_n)$ für ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15. Sei E ein normierter Raum und $A \subset E$ mit $\overline{A} = E$ gegeben. Zeige, dass es eine linear unabhängige Teilmenge M von A mit $\overline{\operatorname{span}(M)} = E$ gibt, falls A abzählbar ist. Bleibt die Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass A abzählbar ist, richtig? (4)
Bemerkung: Dies zeigt, dass man in einem separablen normierten Raum stets eine linear unabhängige, totale, abzählbare Teilmenge findet.

16. Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $O_n \subset M$ offen und dicht in M für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $U \coloneqq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ dicht in M ist! Ist U im Allgemeinen offen? Besitzt U im Allgemeinen innere Punkte? (4)

17. Sei H ein Hilbertraum. Zeige:

(a) Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Dann ist $(x \mid e_i) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$. (2)
Tipp: Zeige zuerst, dass die Bessel'sche Ungleichung $\sum_{i\in I'} |(x \mid e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ für jede endliche Teilmenge I' von I gilt!

(b) Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in H. Die Reihe

$$Px \coloneqq \sum_{i\in I} (x \mid e_i)\, e_i \coloneqq \sum_{(x|e_i)\neq 0} (x \mid e_i)\, e_i$$

konvergiert unbedingt und es gilt $x - Px \perp \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$. Ist (e_i) sogar eine ONB, so gilt $Px = x$. (2)

(c) Es gibt eine ONB $(e_i)_{i\in I}$ von H mit einer (nicht notwendigerweise abzählbaren) Indexmenge I. (2)
Tipp: Betrachte eine natürliche Ordnung auf der Menge aller Orthonormalsysteme von H und verwende das Lemma von Zorn.