Universität Ulm

Donnerstag, 18.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 4

14. Sei E ein Banachraum und $F \neq \{0\}$ ein normierter Raum. Zeige:

(a) Sei $T \in \mathscr{L}(E,F)$ und (T_n) eine Folge in $\mathscr{L}(E,F)$, die stark gegen T konvergiert. Es gibt $M \geq 0$ mit $\|T_n\| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (2)
Bemerkung: Vergleiche Aufgabe 6; die Beschränktheit der Folgen ist dort also automatisch gegeben.

Lösung: Klar nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit.

(b) Ist E ein separabler Hilbertraum, so ist E genau dann endlichdimensional, wenn jede stark konvergente Folge $(T_n) \subset \mathscr{L}(E,F)$ in der Norm von $\mathscr{L}(E,F)$ konvergiert. (4)
Tipp: Für den Fall, dass E unendlichdimensional ist, betrachte zuerst $\varphi_n \in E'$ definiert durch $\varphi_n(x) := (x \mid e_n)$ für ein Orthonormalsystem $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung: Sei E endlichdimensional und (T_n) stark konvergent gegen T. Dann ist $K := \overline{B(0,1)}$ nach Satz (3.8) kompakt und daher (T_n) gleichmäßig konvergent auf K nach Satz (4.3). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also n_0 mit $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ und $x \in \overline{B(0,1)}$, was gerade $\|T_n - T\| \leq \varepsilon$ für $n \geq n_0$ bedeutet, also $T_n \to T$.

Sei nun E unendlichdimensional und (e_n) eine ONB von H. Definiere $\varphi_n(x) := (x \mid e_n)$. Laut Vorlesung gilt $\varphi_n(x) \to 0$ für alle $x \in E$. Andererseits gilt $\varphi_n(e_n) = 1$, also $\|\varphi_n\| \not\to 0$. Mit einem beliebigen Vektor $f \in F$, $f \neq 0$ bedeutet das für $T_n x := \varphi(x) f$, dass (T_n) stark gegen $T = 0$ konvergiert, aber nicht in Operatornorm.

15. Sei E ein normierter Raum und $A \subset E$ mit $\overline{A} = E$ gegeben. Zeige, dass es eine linear unabhängige Teilmenge M von A mit $\overline{\operatorname{span}(M)} = E$ gibt, falls A abzählbar ist. Bleibt die Aussage auch ohne die Voraussetzung, dass A abzählbar ist, richtig? (4)
Bemerkung: Dies zeigt, dass man in einem separablen normierten Raum stets eine linear unabhängige, totale, abzählbare Teilmenge findet.

Lösung: Dies folgt aus dem Basisauswahlsatz. Genauer gesagt ist A nach Definition ein Erzeugendensystem von $\operatorname{span}(A)$. Nach dem Basisauswahlsatz gibt es eine Basis $M \subset A$ von $\operatorname{span}(A)$, also ist M linear unabhängig und $\operatorname{span}(M) = \operatorname{span}(A)$. Wegen $A \subset \operatorname{span}(A)$ zeigt dies die Behauptung. Es werden nun trotzdem noch direkte Beweise gegeben.

Sei $A = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ abzählbar. Definiere induktiv

$$n_k := \min\{n \in \mathbb{N} : x_1, \ldots, x_{k-1}, y_n \text{ linear unabhängig}\}$$

und $x_k := y_{n_k}$, solange die Konstruktion nicht abbricht. Dann ist die (endliche oder unendliche) Familie (x_k) linear unabhängig. Wir zeigen $A \subset \operatorname{span}(M)$, woraus die Behauptung folgt. Sei $y_m \in A$. Ist $y_m \in M$, so ist nichts zu zeigen. Gibt es ein k mit $n_k > m$ oder gibt es nur endlich viele $(x_1, \ldots, x_{k-1})$, so ist $(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_m)$ linear abhängig, aber $(x_1, \ldots, x_{k-1})$ linear unabhängig, was bedeutet, dass man y_m als Linearkombination der anderen Vektoren schreiben kann.

Wir verzichten nun auf die Forderung, dass A abzählbar ist. Die Menge A kann nur für $E = \{0\}$ endlich sein, und dieser Fall ist trivial. Sei A nun überabzählbar und sei $\mathcal{M}$ die Menge aller linear unabhängigen Teilmengen von A, geordnet bezüglich Inklusion. Für jede linear geordnete Kette ist dann ihre Vereinigung eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn gibt es ein maximales Element M. Ist nun $y \in A$, so ist entweder $y \in M$ oder

$M \cup \{y\}$ linear abhängig. In beiden Fällen ist $y \in \mathrm{span}(M)$. Also gilt $A \subset \mathrm{span}(M)$, woraus die Behauptung folgt. Dieser Beweis funktioniert im Übrigen auch für abzählbare Mengen A.

16. Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und $O_n \subset M$ offen und dicht in M für jedes $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $U := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ dicht in M ist! Ist U im Allgemeinen offen? Besitzt U im Allgemeinen innere Punkte? (4)

Lösung: Man kann diese Aussage genau wie im Beweis des Satzes von Baire zeigen. Hier leiten wir sie stattdessen aus der Aussage des Satzes von Baire her und zeigen dazu erst folgende Verallgemeinerung dieses Satzes:

Sei (M, d) ein vollständiger metrischer Raum und (A_n) eine Folge abgeschlossener Teilmengen von M. Die Menge $\bigcup A_n$ besitze einen inneren Punkt. Dann gibt es ein n_0, für das A_n einen inneren Punkt besitzt.

Sei (A_n) eine solche Folge und $\overline{B(y,r)} \subset \bigcup A_n$. Wir betrachten $M' := \overline{B(y,r)}$ wiederum als vollständigen metrischen Raum bezüglich der induzierten Metrik. In diesem Raum sind die Mengen $A'_n := A_n \cap M'$ abgeschlossen, und es gilt $\bigcup A'_n = M'$. Nach dem Satz von Baire aus der Vorlesung gibt es ein n_0, für das A'_{n_0} einen inneren Punkt bezüglich M' besitzt, d.h. es gibt $x \in M'$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$B(x, \varepsilon) \cap \overline{B(y,r)} = B(x, \varepsilon) \cap M' \subset A'_{n_0}.$$

Wegen $x \in \overline{B(y,r)}$ ist $\emptyset \neq B(x, \varepsilon) \cap B(y, r) \subset A'_{n_0}$, was zeigt, dass A_{n_0} auch als Teilmenge von M einen inneren Punkt besitzt.

Seien nun (O_n) offene, dichte Teilmengen von M. Dann sind $A_n := M \setminus O_n$ abgeschlossene Teilmengen von M ohne innere Punkte. Nach obiger Variante des Satzes von Baire besitzt dann auch $\bigcup A_n$ keine inneren Punkte, was zeigt, dass das Komplement dieser Menge, also $U = \bigcap O_n$, dicht in M liegt.

Im Allgemeinen besitzt U keine inneren Punkte und ist somit insbesondere nicht offen. Beispielsweise für $M = \mathbb{R}$ und $O_n := \mathbb{R} \setminus \{q_n\}$, wobei (q_n) eine Abzählung von $\mathbb{Q}$ ist, ist $U = \mathbb{Q}^c$.

17. Sei H ein Hilbertraum. Zeige:

(a) Sei $(e_i)_{i \in I}$ ein Orthonormalsystem in H und $x \in H$. Dann ist $(x \mid e_i) \neq 0$ für höchstens abzählbar viele $i \in I$. (2)

Tipp: Zeige zuerst, dass die Bessel'sche Ungleichung $\sum_{i \in I'} |(x \mid e_i)|^2 \leq \|x\|^2$ für jede endliche Teilmenge I' von I gilt!

Lösung: Sei I' eine endliche Teilmenge von I, $I' = \{i_1, \dots, i_n\}$. Definiere $x_n := \sum_{k=1}^n (x \mid e_{i_k}) e_{i_k}$. Dann ist $x - x_n \perp e_{i_k}$ für $k = 1, \dots, n$ und somit $x - x_n \perp x_n$, also

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|x - x_n + x_n\|^2 = \|x - x_n\|^2 + \|x_n\|^2 \geq \|x_n\|^2 \\ &= \sum_{k=1}^n |(x \mid e_{i_k})|^2 = \sum_{i \in I'} |(x \mid e_i)|^2 \end{aligned}$$

nach dem Satz von Pythagoras.

Wir zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele $i \in I$ mit $|(x \mid e_i)| \geq \varepsilon$ gibt; daraus folgt die Behauptung. Angenommen, es gilt $|(x \mid e_i)| \geq \varepsilon_0 > 0$ für unendlich viele $i \in I$. Dann gibt es insbesondere eine Menge $I' \subset I$ der Größe $n > \frac{\|x\|^2}{\varepsilon_0^2}$ mit $|(x \mid e_i)| \geq \varepsilon_0$ für $i \in I'$. Also folgt

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i \in I'} |(x \mid e_i)|^2 \geq n\varepsilon_0^2 > \|x\|^2,$$

ein Widerspruch.

(b) Sei $(e_i)_{i\in I}$ ein Orthonormalsystem in H. Die Reihe

$$Px \coloneqq \sum_{i\in I} (x \mid e_i)\, e_i \coloneqq \sum_{(x|e_i)\neq 0} (x \mid e_i)\, e_i$$

konvergiert unbedingt und es gilt $x - Px \perp \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$. Ist (e_i) sogar eine ONB, so gilt $Px = x$. (2)

Lösung: Die Reihe auf der rechten Seite ist nach dem vorigen Aufgabenteil eine Reihe mit abzählbar vielen Summanden, sodass die Schreibweise sinnvoll ist, falls die Reihe unbedingt konvergiert.
Sei $x \in H$ und

$$I' \coloneqq \big\{i \in I : (x \mid e_i) \neq 0\big\}.$$

Ist I' endlich, so konvergiert $\sum_{i\in I'} (x \mid e_i)\, e_i$ unbedingt. Sei also I' unendlich. Dann ist I' nach dem vorigen Aufgabenteil abzählbar, und wir schreiben $I' = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$.
Nach dem vorigen Aufgabenteil ist

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\,(x \mid e_{i_k})\,|^2 \leq \|x\|^2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher gilt

$$\Big\|\sum_{k=m}^{n} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}\Big\|^2 = \sum_{k=m}^{n} |\,(x \mid e_{i_k})\,|^2 \to 0$$

für $m, n \to \infty$. Das zeigt, dass die Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}$ eine Cauchy-Folge in H sind. Sei $Px \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}$.
Wir müssen noch zeigen, dass jede Umordnung der Reihe ebenfalls gegen Px konvergiert. Sei dazu π eine Permutation von $\mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Wähle n_0 mit

$$\Big\|Px - \sum_{k=1}^{n_0} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}\Big\|^2 = \Big\|\sum_{n=n_0+1}^{\infty} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}\Big\|^2 = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} |\,(x \mid e_{i_k})\,|^2 \leq \varepsilon^2$$

und wähle m_0 mit $\{1, \ldots, n_0\} \subset \{\pi(1), \ldots, \pi(m_0)\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\Big\|Px - \sum_{k=1}^{m_0} \Big(x \mid e_{i_{\pi(k)}}\Big)\, e_{i_{\pi(k)}}\Big\|^2 \\
&\quad\leq \Big(\Big\|Px - \sum_{k=1}^{n_0} (x \mid e_{i_k})\, e_{i_k}\Big\| + \Big\|\sum_{k=1}^{m_0} \mathbb{1}_{\{\pi(k)>n_0\}} \Big(x \mid e_{i_{\pi(k)}}\Big)\, e_{i_{\pi(k)}}\Big\|\Big)^2 \\
&\quad\leq \Big(\varepsilon + \Big(\sum_{k=1}^{m_0} \mathbb{1}_{\{\pi(k)>n_0\}} \Big|\Big(x \mid e_{i_{\pi(k)}}\Big)\Big|^2\Big)^{1/2}\Big)^2 \leq (2\varepsilon)^2.
\end{aligned}$$

Das zeigt $\sum_{k=1}^{\infty} \Big(x \mid e_{i_{\pi(k)}}\Big)\, e_{i_{\pi(k)}} = Px$ und somit die unbedingte Konvergenz der Reihe.
Wegen Stetigkeit des Skalarprodukts folgt

$$(x - Px \mid e_j) = (x \mid e_j) - \sum_{i\in I} (x \mid e_i)\, (e_i \mid e_j) = 0,$$

für $j \in I$. Mit Linearität und Stetigkeit des Skalarprodukts zeigt dies $x - Px \perp \overline{\operatorname{span}\{e_i : i \in I\}}$.
Ist (e_i) sogar eine ONB, heißt dies gerade $x - Px \perp H$, also insbesondere

$$\|x - Px\|^2 = (x - Px \mid x - Px) = 0,$$

was $Px = x$ zeigt.

(c) Es gibt eine ONB $(e_i)_{i\in I}$ von H mit einer (nicht notwendigerweise abzählbaren) Indexmenge I. (2)

Tipp: Betrachte eine natürliche Ordnung auf der Menge aller Orthonormalsysteme von H und verwende das Lemma von Zorn.

Lösung: Sei $\mathcal{M}$ die Menge aller Orthonormalsysteme von H, geordnet mittels Mengeninklusion. Für eine geordnete Kette solcher Systeme ist ihre Vereinigung eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn gibt es dann ein maximales Element $M = \{e_i : i \in I\}$. Es ist nur zu zeigen, dass $\operatorname{span}(M)$ in H dicht ist.
Nehmen wir $U \coloneqq \overline{\operatorname{span}(M)} \neq H$ an. Wähle $x \in H \setminus U$. Dann ist

$$Px = \sum_{i\in I} (x \mid e_i)\, e_i \in U$$

und somit $y \coloneqq x - Px \neq 0$. Nach dem vorigen Aufgabenteil gilt $y \perp U$, also $y/\|y\| \perp M$. Damit ist $(M, y/\|y\|) \in \mathcal{M}$, was der Maximalität von M wiederspricht.