Universität Ulm

Donnerstag, 25.11.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+5

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 5

18. Sei $L^2_{2\pi} := \left\{ f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ messbar, } 2\pi\text{-periodisch} : \int_0^{2\pi} |f|^2 < \infty \right\}$ mit dem Skalarprodukt

$$(u \mid v)_2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\overline{v}$$

versehen. Da $\mathrm{C}_{2\pi}$ in $L^2_{2\pi}$ dicht ist, ist $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis von $L^2_{2\pi}$.

(a) Berechne die Fourierkoeffizienten der Funktion $f \in L^2_{2\pi}$, die auf $[0, 2\pi)$ durch $f(x) = 1$ für $x \in [0, \pi]$ und $f(x) = 0$ für $x \in (\pi, 2\pi)$ gegeben ist! (2)

Lösung: Es ist $c_0 = \frac{1}{2}$ und

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-ikt} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{-2\pi i k} \, \mathrm{e}^{-ikt} \Big|_0^{\pi} = \begin{cases} 0, & k \text{ gerade} \\ \frac{1}{\pi i k}, & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

für $k \neq 0$.

(b) Zeige $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$! (2)
Tipp: Parseval'sche Gleichung.

Lösung: Nach der Parseval'schen Gleichung gilt

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{4} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\pi^2 (2k+1)^2}.$$

Löst man nach der Reihe auf, erhält man die Behauptung.

(c) Berechne $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$! (2)

Lösung: Da alle auftretenden Reihen konvergieren, gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8}.$$

Löst man diese Gleichung nach der Reihe auf, erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

19. Sei X ein Banachraum und $F \neq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X. Zeige, dass die Quotientenabbildung $q\colon X \to X/F$, $x \mapsto x + F$ die offene Einheitskugel in X auf die offene Einheitskugel in X/F abbildet und schlussfolgere $\|q\| = 1$! (2)

Lösung: Bezeichne B_X die offene Einheitskugel in X und $B_{X/F}$ die offene Einheitskugel in X/F. Für $x \in B_X$ ist

$$\|x + F\| = \operatorname{dist}(x, F) \leq \|x\| < 1,$$

also $q(x) \in B_{X/F}$, was $q(B_X) \subset B_{X/F}$ zeigt. Daraus folgt $\|q\| \leq 1$.

Sei $x+F \in B_{X/F}$, also $\operatorname{dist}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x-y\| < 1$. Dann gibt es $y \in F$ mit $\|x-y\| < 1$. Mit $z := x - y$ ist also $z \in B_X$ und $q(z) = x - y + F = x + F$, was $x + F \in q(B_X)$ zeigt, also $B_{X/F} \subset q(B_X)$. Wegen $X/F \neq \{0\}$ folgt daraus $\|q\| = \sup_{z\in B_X} \|q(z)\| \geq 1$.

20. Seien E und F Banachräume und bezeichne $\mathscr{R}(E,F)$ die Menge der injektiven Operatoren $T \in \mathscr{L}(E,F)$, deren Bild ein abgeschlossener Unterraum von F ist. Zeige:

(a) Es ist $T \in \mathscr{R}(E,F)$ genau dann, wenn es eine Konstante $\alpha > 0$ mit $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

Lösung: Sei $T \in \mathscr{R}(E,F)$. Dann ist $R \coloneqq \operatorname{Rg} T$ ein Banachraum bezüglich der Norm von F und T bijektiv und stetig von E nach R. Nach dem Satz über die beschränkte Inverse ist T dann invertierbar, woraus nach Aufgabe 5 folgt, dass es $\alpha > 0$ gibt mit $\|Tx\|_F = \|Tx\|_R \geq \alpha\|x\|_E$ für alle $x \in E$.

Gebe es nun umgekehrt $\alpha > 0$ mit $\|Tx\| \geq \alpha\|x\|$ für alle $x \in E$. Aus $Tx = 0$ folgt dann $\|x\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx\| = 0$, also $x = 0$, was zeigt, dass T injektiv ist. Sei nun (Tx_n) eine konvergente Folge in $\operatorname{Rg} T$ mit $Tx_n \to y$. Dann ist $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\|Tx_n - Tx_m\|$ und somit (x_n) eine Cauchyfolge in E. Mit $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$ gilt dann $Tx_n \to Tx$, also wegen Eindeutigkeit des Grenzwerts $y = Tx \in \operatorname{Rg} T$. Wir haben gezeigt, dass $\operatorname{Rg} T$ abgeschlossen ist. Ingesamt haben wir $T \in \mathscr{R}(E,F)$ bewiesen.

(b) $\mathscr{R}(E,F)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathscr{L}(E,F)$. (2)

Lösung: Sei $T \in \mathscr{R}(E,F)$ und $\alpha_T > 0$ wie im vorigen Aufgabenteil. Für $S \in \mathscr{L}(E,F)$ mit $\|S - T\| < \alpha_T$ gilt dann

$$\|Sx\| \geq \|Tx\| - \|Tx - Sx\| \geq (\alpha_T - \|T - S\|)\|x\|$$

für alle $x \in E$. Aus dem vorigen Aufgabenteil folgt dann mit $\alpha_S \coloneqq \alpha_T - \|T - S\| > 0$, dass S in $\mathscr{R}(E,F)$ liegt.

(c) Falls es ein $T_0 \in \mathscr{L}(E,F)$ gibt, für das $\operatorname{Rg} T_0$ nicht abgeschlossen ist, so ist die Menge $M \coloneqq \{T \in \mathscr{L}(E,F) : \operatorname{Rg} T \text{ abgeschlossen}\}$ nicht offen in $\mathscr{L}(E,F)$. (2)

Lösung: Offenbar ist $0 \in M$. Wäre M offen, so gäbe es $\varepsilon > 0$ mit $B(0,\varepsilon) \subset M$. Insbesondere wäre $T \coloneqq \frac{\varepsilon T_0}{2\|T_0\|} \in M$, was wegen $\operatorname{Rg} T = \operatorname{Rg} T_0$ aber der Wahl von T_0 widerspricht.

21. Sei X ein Banachraum und U ein Unterraum von X. Dann heißt U *projezierbar*, falls es eine Projektion $P \in \mathscr{L}(X)$ mit $\operatorname{Rg} P = U$ gibt. Zeige:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent: (2)

(i) U ist projezierbar.

(ii) U ist abgeschlossen und es gibt einen abgeschlossenen Unterraum V von X mit $U \oplus V = X$.

Lösung: Gibt es eine Projektion $P \in \mathscr{L}(X)$ mit $\operatorname{Rg} P = U$, so ist laut Vorlesung $X = U \oplus V$ mit $V = \operatorname{Kern} P$, und U und V sind abgeschlossen.

Gilt umgekehrt $X = U \oplus V$ mit abgeschlossenen Mengen U und V, so definiert $Px = x_U$, wobei $x = x_U + x_V$ die eindeutige Darstellung mit $x_U \in U$ und $x_V \in V$ sei, eine Projektion mit $U = \operatorname{Rg} P$ und $V = \operatorname{Kern} P$. Laut Vorlesung ist dann $P \in \mathscr{L}(X)$.

(b) Ist U projezierbar, so ist X/U zu einem Unterraum von X isomorph. (2)

Lösung: Nach dem ersten Aufgabenteil ist $X = U \oplus V$ mit abgeschlossenen Unterräumen U und V. Betrachte die Norm $\|x\|_2 \coloneqq \|x_U\|_X + \|x_V\|_X$, wobei $x = x_U + x_V$ die eindeutige Darstellung mit $x_U \in U$ und $x_V \in V$ sei. Dann ist $(X, \|\cdot\|_2)$ ein Banachraum und $\|x\|_X \leq \|x\|_2$ für alle $x \in X$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass in diesem Fall $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_2$ 'aquivalente Normen sind. Dann sind natürlich auch $\|x + U\| \coloneqq \inf_{u\in U}\|x - u\|_X$ und $\|x + U\|_2 \coloneqq \inf_{u\in U}\|x - u\|_2$ äquivalente Normen auf X/U.

Der Raum V ist mittels $v \mapsto v + U$ isometrisch isomorph zu $(X/U, \|\cdot\|_2)$, denn

$$\|v + U\|_2 = \inf_{u\in U}\big(\|u\|_X + \|v\|_X\big) = \|u\|_X$$

und die Injektivität folgt aus $U \cap V = \{0\}$, während die Surjektivität klar ist. Folglich ist V isomorph zu $(X/U, \|\cdot\|)$, was gerade die Behauptung zeigt.

(c) **Bonusaufgabe:** c_0 ist in ℓ^∞ nicht projezierbar. (+5)
Tipp: Zeige, dass es keine abzählbare punktetrennende Teilmenge von $(\ell^\infty/c_0)'$ gibt.

Lösung: Wir zeigen zuerst die Aussage im Tipp. Sei dazu $(A_i)_{i\in I}$ eine überabzählbare Familie von Teilmengen von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass jede der Mengen A_i unendlich viele Elemente besitzt, aber die Durchschnitte $A_i \cap A_j$ für $i \neq j$ endliche Mengen sind. Zum Beweis der Existenz eines solchen Systems sei $p\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ bijektiv. Wir setzen $I := \mathbb{R}$. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ wählen wir eine Folge $(q_n(x)) \subset \mathbb{Q}$ mit $q_n(x) \to x$ und setzen $A_x := \{p(q_n(x)) : n \in \mathbb{N}\}$. Die geforderten Eigenschaften von $(A_x)_{x\in I}$ prüft man nun leicht nach.

Wir definieren $x_i := \mathbb{1}_{A_i} + c_0 \in \ell^\infty/c_0$. Beachte, dass dann $\|\sum_{i\in I'} \vartheta_i x_i\| = 1$ für jede endliche Teilmenge $\emptyset \neq I' \subset I$ gilt, wenn $|\vartheta_i| = 1$ für alle $i \in I'$ ist. Insbesondere ist $x_i \neq 0$ für alle $i \in I$.

Sei $A \subset (\ell^\infty/c_0)'$ abzählbar und $\varphi \in A$. Setze $I_{\varphi,n} := \{i \in I : |\varphi(x_i)| \geq \frac{1}{n}\}$. Zu jedem $i \in I_{\varphi,n}$ gibt es $\vartheta_i \in \mathbb{C}$ mit $|\vartheta_i| = 1$ und $\varphi(\vartheta_i x_i) \geq \frac{1}{n}$. Somit gilt für jede endliche Teilmenge $I' \neq \emptyset$ von $I_{\varphi,n}$

$$\|\varphi\| \geq \Big|\varphi\Big(\sum_{i\in I'} \vartheta_i x_i\Big)\Big| = \Big|\sum_{i\in I'} \varphi(\vartheta_i x_i)\Big| \geq \frac{\#I'}{n}.$$

Also enthält I' höchstens $n\|\varphi\|$ Elemente, was zeigt, dass $I_{\varphi,n}$ eine endliche Menge ist. Das beweist, dass

$$\tilde{I} := \big\{i \in I \mid \exists \varphi \in A : \varphi(x_i) \neq 0\big\} = \bigcup_{\varphi\in A} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_{\varphi,n}$$

abzählbar ist. Also ist $\tilde{I} \neq I$, was bedeutet, dass es $x_i \in \ell^\infty/c_0$ mit $x_i \neq 0$ und $\varphi(x_i) = 0$ für alle $\varphi \in A$ gibt. Man sagt dazu auch, dass A nicht punktetrennend ist. Wir haben nun die Aussage des Tipps bewiesen.

Wäre c_0 in ℓ^∞ komplementiert, so gäbe es einen abgeschlossenen Unterraum V von ℓ^∞ und einen Isomorphismus $T\colon \ell^\infty/c_0 \to V$. Für ℓ^∞ sind die Koordinatenfunktionale eine abzählbare, punktetrennende Teilmenge von $(\ell^\infty)'$. Also sind ihre Einschränkungen $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf V also punktetrennend für V. Setze $\psi_n := \varphi_n \circ T \in (\ell^\infty/c_0)'$. Ist nun $x \in \ell^\infty/c_0$ mit $\psi_n(x) = 0$, also $\varphi_n(Tx) = 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $Tx = 0$ und schließlich $x = 0$. Das heißt, dass $\{\psi_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare punktetrennende Menge in $(\ell^\infty/c_0)'$ ist im Widerspruch zur Aussage des Tipps. Also kann c_0 in ℓ^∞ nicht komplementiert sein.

22. Sei $1 < p < \infty$ und $-\infty < a < b < \infty$. Laut Vorlesung gibt es $c_{a,b} \geq 0$ mit

$$\|u\|_\infty \leq c_{p,a,b}\|u\|_{W^{1,p}(a,b)} = c_{p,a,b}\big(\|u\|_p + \|u'\|_p\big)$$

für alle $u \in W^{1,p}(a,b)$. Finde einen expliziten Wert für $c_{p,a,b}$! (2)
Bemerkung: Der explizite Wert muss nicht optimal sein.
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass $u \in \mathrm{C}[a,b]$ und $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $u \in W^{1,p}(a,b)$ und $x \in [a,b]$ gilt.

Lösung: Aus der Darstellung im Hinweis erhält man mit der Hölderungleichung

$$|u(x) - u(y)| = \Big|\int_y^x u'(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq \int_a^b |u'(t)|\,\mathrm{d}t \leq \|u'\|_p \|\,\mathbb{1}_{(a,b)}\,\|_{p'}$$

für alle $x, y \in [a,b]$, wobei wir die Konvention $\int_x^y := -\int_y^x$ für $y < x$ verwendet haben. Man erhält also

$$\begin{aligned}(b-a)|u(x)| = \int_a^b |u(x)| \,\mathrm{d}y &\le \int_a^b |u(x) - u(y)| \,\mathrm{d}y + \int_a^b |u(y)| \,\mathrm{d}y \\ &\le \|u'\|_p (b-a) \| \mathbb{1}_{(a,b)} \|_{p'} + \|u\|_p \| \mathbb{1}_{(a,b)} \|_{p'}.\end{aligned}$$

Folglich ist

$$|u(x)| \le (b-a)^{(p-1)/p} \|u'\|_p + (b-a)^{-1/p} \|u\|_p \le c_{p,a,b} \|u\|_{W^{1,p}(a,b)}$$

mit

$$c_{p,a,b} := \max\big\{ (b-a)^{(p-1)/p}, (b-a)^{-1/p} \big\}.$$