Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 6

23. Sei H ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum, $C \subset H$ abgeschlossen und konvex, $x \in H$ und $\hat{x} \in C$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $\|x - \hat{x}\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in C$.

(ii) $\operatorname{Re}(x - \hat{x} \mid y - \hat{x}) \leq 0$ für alle $y \in C$.

24. Sei H ein Hilbertraum, sei $C \subset H$ abgeschlossen und konvex, P die orthogonale Projektion von H auf C. Zeige:

(a) $\|Px - Py\| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in H$, mit Gleichheit genau für $x - Px = y - Py$. (2)

(b) Ist $C \neq \{0\}$ ein Unterraum, so gilt $\|P\| = 1$. (2)

(c) Ist C ein Unterraum, so gilt $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ für alle $x, y \in H$. (2)

25. Sei E ein reeller Banachraum und E_+ ein abgeschlossener Kegel in E, also $E_+ \neq \emptyset$, $\lambda E_+ \subset E_+$ für alle $\lambda \geq 0$ und $E_+ + E_+ \subset E_+$. Ein Funktional $\varphi \in E'$ heißt *positiv (bezüglich E_+)*, falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in E_+$ gilt. Zeige:

(a) Die Abbildung $p_E \colon E \to [0, \infty)$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, -E_+)$ ist sublinear, d.h. für $x, y \in E$ und $\lambda \geq 0$ gilt $p_E(x + y) \leq p_E(x) + p_E(y)$ und $p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x)$. (2)

(b) Ein Funktional $\varphi \in E'$ ist genau dann positiv, wenn es ein $c \geq 0$ mit $\varphi(x) \leq c p_E(x)$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

(c) Sei F ein abgeschlossener Unterraum von E und $F_+ := E_+ \cap F$. Für alle $x \in F$ gelte $p_F(x) := \operatorname{dist}(x, -F_+) = p_E(x)$. Ist $\varphi \in F'$ positiv bezüglich F_+, so besitzt φ eine bezüglich E_+ positive Fortsetzung $\psi \in E'$ mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (2)

(d) Sei $E := \ell^\infty$ und $E_+ := \ell^\infty_+ := \{(x_n) \in \ell^\infty : x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Für $F := c$ und $F := c_0$ lässt sich jedes bezüglich $F_+ := E_+ \cap F$ positive Funktional $\varphi \in F'$ zu einem bezüglich E_+ positiven Funktional $\psi \in E'$ fortsetzen. (2)

(e) Es gibt ein bezüglich ℓ^∞_+ positives Funktional $\varphi \in (\ell^\infty)'$ mit $\varphi(x) = \lim x$ für $x \in c$. Für dieses Funktional gibt es kein $y \in \ell^1$ mit $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ für alle $x \in \ell^\infty$. (2)
Bemerkung: Anders als für $p \in [1, \infty)$ gilt für $p = \infty$ also nicht $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ mit der üblichen Identifikation.

26. Sei E ein Banachraum und F ein zu ℓ^∞ isomorpher Unterraum von E. Zeige, dass F in E komplementiert ist! (2)