Universität Ulm

Donnerstag, 02.12.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 6

23. Sei H ein (reeller oder komplexer) Hilbertraum, $C \subset H$ abgeschlossen und konvex, $x \in H$ und $\hat{x} \in C$. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind: (2)

(i) $\|x - \hat{x}\| \leq \|x - y\|$ für alle $y \in C$.

(ii) $\operatorname{Re}(x - \hat{x} \mid y - \hat{x}) \leq 0$ für alle $y \in C$.

Lösung: Es gelte (ii). Für $y \in C$ ist dann

$$\|x - y\|^2 = \|(x - \hat{x}) - (y - \hat{x})\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 - 2\operatorname{Re}(x - \hat{x} \mid y - \hat{x}) + \|\hat{x} - y\|^2 \geq \|x - \hat{x}\|^2.$$

Gelte nun (i). Für $y \in C$ und $\lambda \in (0,1)$ ist dann $\hat{x} + \lambda(y - \hat{x}) \in C$ und somit

$$\|x - \hat{x}\|^2 \leq \|x - \hat{x} - \lambda(y - \hat{x})\|^2 = \|x - \hat{x}\|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}(x - \hat{x} \mid y - \hat{x}) + \lambda^2 \|y - \hat{x}\|^2,$$

also

$$2\operatorname{Re}(x - \hat{x} \mid y - \hat{x}) \leq \lambda \|y - \hat{x}\|^2.$$

Durch Grenzübergang $\lambda \to 0$ erhält man die Behauptung.

24. Sei H ein Hilbertraum, sei $C \subset H$ abgeschlossen und konvex, P die orthogonale Projektion von H auf C. Zeige:

(a) $\|Px - Py\| \leq \|x - y\|$ für alle $x, y \in H$, mit Gleichheit genau für $x - Px = y - Py$. (2)

Lösung: Für alle x und y gilt

$$\operatorname{Re}(x - Px \mid Py - Px) \leq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{Re}(y - Py \mid Px - Py) \leq 0$$

nach der vorherigen Aufgabe. Also ist

$$\begin{aligned}
\|x - y\|^2 &= \|(x - Px) + (Px - Py) + (Py - y)\|^2 \\
&= \|x - Px\|^2 + \|Px - Py\|^2 + \|Py - y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x - Px \mid Px - Py) \\
&\qquad + 2\operatorname{Re}(Py - y \mid Px - Py) + 2\operatorname{Re}(x - Px \mid Py - y) \\
&\geq \|x - Px\|^2 + 2\operatorname{Re}(x - Px \mid Py - y) + \|Py - y\|^2 + \|Px - Py\|^2 \\
&= \|x - Px + Py - y\|^2 + \|Px - Py\|^2 \geq \|Px - Py\|^2.
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Ungleichung, und zudem kann Gleichheit höchstens dann gelten, wenn $\|x - Px + Py - y\|^2 = 0$ ist, also nur für $x - Px = y - Py$. Ist andererseits diese Gleichung erfüllt, so hat man trivialerweise $\|x - y\|^2 = \|Px - Py\|^2$.

(b) Ist $C \neq \{0\}$ ein Unterraum, so gilt $\|P\| = 1$. (2)

Lösung: Die Abschätzung $\|P\| \leq 1$ folgt aus dem vorigen Aufgabenteil. Für $x \in C$ mit $\|x\| = 1$ ist $\|P\| \geq \|Px\| = \|x\| = 1$. Also gilt $\|P\| = 1$.

(c) Ist C ein Unterraum, so gilt $(Px \mid y) = (x \mid Py)$ für alle $x, y \in H$. (2)

Lösung: Laut Vorlesung sind $x - Px$ und $y - Py$ in $C^\perp$, also insbesondere

$$0 = (x - Px \mid Py) - (Px \mid y - Py) = (x \mid Py) - (Px \mid y),$$

was die Behauptung zeigt.

25. Sei E ein reeller Banachraum und E_+ ein abgeschlossener Kegel in E, also $E_+ \neq \emptyset$, $\lambda E_+ \subset E_+$ für alle $\lambda \geq 0$ und $E_+ + E_+ \subset E_+$. Ein Funktional $\varphi \in E'$ heißt *positiv (bezüglich E_+)*, falls $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in E_+$ gilt. Zeige:

(a) Die Abbildung $p_E \colon E \to [0,\infty)$, $x \mapsto \operatorname{dist}(x, -E_+)$ ist sublinear, d.h. für $x, y \in E$ und $\lambda \geq 0$ gilt $p_E(x+y) \leq p_E(x) + p_E(y)$ und $p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x)$. (2)

Lösung: Seien $x, y \in E$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $z_1, z_2 \in -E_+$ mit $\|x - z_1\| \leq p_E(x) + \varepsilon$ und $\|y - z_2\| \leq p_E(y) + \varepsilon$. Dann gilt $z_1 + z_2 \in -E_+$ und daher

$$p_E(x+y) \leq \|x + y - (z_1 + z_2)\| \leq \|x - z_1\| + \|y - z_2\| \leq p_E(x) + p_E(y) + 2\varepsilon.$$

Weil diese Abschätzung für jedes $\varepsilon > 0$ richtig ist, folgt $p_E(x+y) \leq p_E(x) + p_E(y)$.
Sei $x \in E$, $\lambda > 0$ und $\varepsilon > 0$. Wähle $z \in -E_+$ mit $\|x - z\| \leq p_E(x) + \varepsilon$. Wegen $\lambda z \in E_+$ gilt dann

$$p_E(\lambda x) \leq \|\lambda x - \lambda z\| = \lambda \|x - z\| \leq \lambda p_E(x) + \lambda\varepsilon,$$

was nach Grenzübergang $p_E(\lambda x) \leq \lambda p_E(x)$ zeigt. Inbesondere gilt $p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x)$ für $\lambda = 0$. Für $\lambda > 0$ folgt

$$p_E(\lambda x) \leq \lambda p_E(x) = \lambda p_E(\tfrac{\lambda x}{\lambda}) \leq \tfrac{\lambda}{\lambda} p_E(\lambda x) = p_E(\lambda x),$$

was auch in diesem Fall $p_E(\lambda x) = \lambda p_E(x)$ zeigt.

(b) Ein Funktional $\varphi \in E'$ ist genau dann positiv, wenn es ein $c \geq 0$ mit $\varphi(x) \leq c p_E(x)$ für alle $x \in E$ gibt. (2)

Lösung: Sei zuerst $\varphi(x) \leq c p_E(x)$ für alle $x \in E$. Für $x \in E_+$ ist dann

$$-\varphi(x) = \varphi(-x) \leq c p_E(-x) = 0,$$

also $\varphi(x) \geq 0$.
Sei nun φ positiv und $x \in E$. Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $z \in -E_+$ mit $\|x - z\| \leq p_E(x) + \varepsilon$. Dann ist $\varphi(-z) \geq 0$ und somit

$$\varphi(x) \leq \varphi(x - z) \leq \|\varphi\| \, \|x - z\| \leq \|\varphi\| \, p_E(x) + \varepsilon \|\varphi\|,$$

woraus mit $\varepsilon \to 0$ die Behauptung für $c := \|\varphi\|$ folgt.

(c) Sei F ein abgeschlossener Unterraum von E und $F_+ := E_+ \cap F$. Für alle $x \in F$ gelte $p_F(x) := \operatorname{dist}(x, -F_+) = p_E(x)$. Ist $\varphi \in F'$ positiv bezüglich F_+, so besitzt φ eine bezüglich E_+ positive Fortsetzung $\psi \in E'$ mit $\|\psi\| = \|\varphi\|$. (2)

Lösung: Nach dem Beweis des vorigen Aufgabenteils gilt $\varphi(x) \leq \|\varphi\| \, p_F(x) = \|\varphi\| \, p_E(x)$ für alle $x \in F$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach gibt es also ein lineares Funktional ψ auf E mit $\psi(x) \leq \|\varphi\| \, p_E(x)$ für alle $x \in E$. Nach dem vorigen Aufgabenteil ist ψ positiv. Da aus $0 \in E_+$ sofort $p_E(x) \leq \|x\|$ folgt, hat man $\psi(x) \leq \|\varphi\| \, \|x\|$. Also ist $|\psi(x)| \leq \|\varphi\| \, \|x\|$, was $\psi \in E'$ und genauer $\|\psi\| \leq \|\varphi\|$ zeigt. Wegen $\psi|_F = \varphi$ ist aber auch $\|\psi\| \geq \|\varphi\|$.

(d) Sei $E := \ell^\infty$ und $E_+ := \ell^\infty_+ := \{(x_n) \in \ell^\infty : x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}\}$. Für $F := c$ und $F := c_0$ lässt sich jedes bezüglich $F_+ := E_+ \cap F$ positive Funktional $\varphi \in F'$ zu einem bezüglich E_+ positiven Funktional $\psi \in E'$ fortsetzen. (2)

Lösung: Es ist nur die Bedingung $p_E(x) = p_F(x)$ für $x \in F$ zu prüfen. Dazu genügt aber die einfache Beobachtung, dass mit $r^+ := \max\{0, r\}$, $r^- := \max\{0, -r\}$ und $x^- := (x_n^-)$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^+ \leq \inf_{y \in E_+} \|x + y\|_\infty = p_E(x) \leq \|x + x^-\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n^+$$

für alle $x \in E$ gilt und wegen $x^- \in F$ für $x \in F$ ein ähnliches Argument für p_F richtig bleibt, also

$$p_E(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} x_n^+ = p_F(x)$$

für alle $x \in F$ gilt.

(e) Es gibt ein bezüglich ℓ^∞_+ positives Funktional $\varphi \in (\ell^\infty)'$ mit $\varphi(x) = \lim x$ für $x \in c$. Für dieses Funktional gibt es kein $y \in \ell^1$ mit $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ für alle $x \in \ell^\infty$. (2)
Bemerkung: Anders als für $p \in [1, \infty)$ gilt für $p = \infty$ also nicht $(\ell^p)' = \ell^{p'}$ mit der üblichen Identifikation.

Lösung: Offenbar ist lim ein positives Funktional auf c. Nach dem vorigen Aufgabenteil gibt es also ein positives Funktional $\varphi \in (\ell^\infty)'$ mit $\varphi(x) = \lim x$ für $x \in c$. Gäbe es ein $y \in \ell^1$ mit $\varphi(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$, so wäre $y_n = \varphi(e_n) = \lim e_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $\varphi = 0$ im Widerspruch zu $\varphi(\mathbb{1}) = 1$.

26. Sei E ein Banachraum und F ein zu ℓ^∞ isomorpher Unterraum von E. Zeige, dass F in E komplementiert ist! (2)

Lösung: Sei $T\colon F \to \ell^\infty$ ein Isomorphismus und $\varphi_k \in (\ell^\infty)'$ die Koordinatenauswertung $\varphi_k((x_n)) := x_k$. Setze $\psi_k := \varphi_k \circ T \in F'$. Nach dem Fortsetzungssatz von Hahn-Banach gibt es eine Fortsetzung $\psi_k' \in E'$ von ψ_k mit Norm

$$\|\psi_k'\| \le \|\psi_k\| \le \|T\| \, \|\varphi_k\| \le \|T\|.$$

Definiere $Qx := (\psi_k'(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Dann ist offenbar $Q \in \mathscr{L}(E, \ell^\infty)$. Somit ist $P := T^{-1}Q \in \mathscr{L}(E)$. Zudem ist nach Konstruktion $Px \in F$ für alle $x \in E$. Ist $x \in F$, so gilt

$$Qx = (\psi_n'(x)) = (\psi_n(x)) = (\varphi_n(Tx)) = Tx$$

und somit $Px = x$. Also ist P eine stetige Projektion auf F, woraus mit Aufgabe 21 die Behauptung folgt.