Universität Ulm

Donnerstag, 09.12.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 7

27. Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{C}$. Zeige: Zu jeder $\mathbb{R}$-linearen Funktion $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $\psi\colon E \to \mathbb{C}$ mit $\varphi = \operatorname{Re}\psi$. Das Funktional ψ ist genau dann stetig, wenn φ stetig ist, und dann ist $\|\varphi\| \le \|\psi\| \le \sqrt{2}\|\varphi\|$. (2)

28. Sei E ein unendlich-dimensionaler reeller Banachraum. Zeige:

(a) Jede Vektorraumbasis von E ist überabzählbar. (2)

(b) Es gibt eine konvexe Menge $C \subset H$ und einen Punkt $p \in E \setminus C$, die sich nicht trennen lassen, d.h. es gibt kein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) < \varphi(p)$ für alle $x \in C$. (2)

29. Sei E ein reeller normierter Raum. Ein *Halbraum* $H \subset E$ ist eine Menge der Form $H = \{x \in E : \varphi(x) \ge \alpha\}$ mit $\varphi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Ist $(H_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbräumen in E, so ist $\bigcap_{i\in I} H_i$ abgeschlossen und konvex. (2)

(b) Ist $C \subset E$ abgeschlossen und konvex, so gibt es eine Familie $(H_i)_{i\in I}$ von Halbräumen mit $C = \bigcap_{i\in I} H_i$. (2)

(c) Ist E separabel und $C \subset E$ abgeschlossen und konvex, so gibt es eine abzählbare Familie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbräumen mit $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$. (3)

30. Sei E ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in E.

(a) Sei (x_n) beschränkt. Zeige, dass es eine Teilfolge (x_{n_k}) gibt, für die $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ existiert! (3)
Tipp: Man kann sich auf den Fall $x_n \rightharpoonup 0$ zurückziehen.

(b) Sei $C \subset E$ abgeschlossen und konvex. Es gelte $(x_n) \subset C$ und $x_n \rightharpoonup x$. Schlussfolgere aus dem vorigen Aufgabenteil, dass dann $x \in C$ gilt! (2)

31. Wir fassen wir die Einheitsvektoren $e_n \in \ell^1$ mittels der Auswertungsabbildung als Funktionale auf $\ell^\infty = (\ell^1)'$ auf. Zeige, dass (e_n) keine σ^*-konvergente Teilfolge besitzt, und schlussfolgere, dass ℓ^∞ nicht separabel ist! (2)