Universität Ulm

Donnerstag, 09.12.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 7

27. Sei E ein normierter Raum über $\mathbb{C}$. Zeige: Zu jeder $\mathbb{R}$-linearen Funktion $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ gibt es genau ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional $\psi\colon E \to \mathbb{C}$ mit $\varphi = \operatorname{Re}\psi$. Das Funktional ψ ist genau dann stetig, wenn φ stetig ist, und dann ist $\|\varphi\| \le \|\psi\| \le \sqrt{2}\|\varphi\|$. (2)

Lösung: Sei φ gegeben. Falls es so ein ψ gibt, erfüllt dieses

$$\varphi(ix) = \operatorname{Re}\psi(ix) = \operatorname{Re}(i\psi(x)) = -\operatorname{Im}\psi(x)$$

für alle $x \in E$. Der einzige Kandidat ist also $\psi(x) := \varphi(x) - i\varphi(ix)$. Dass ψ additiv ist, ist offensichtlich. Für $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ und $x \in E$ gilt

$$\begin{aligned}\psi(\lambda x) = \psi(ax) + \psi(ibx) &= a\varphi(x) - ia\varphi(ix) + b\varphi(ix) - ib\varphi(-x)\\ &= (a+ib)(\varphi(x) - i\varphi(ix)) = \lambda\psi(x).\end{aligned}$$

Also ist ψ tatsächlich $\mathbb{C}$-linear.

Aus den Formeln für φ und ψ sieht man sofort, dass sich die Statigkeit überträgt. Genauer folgt aber aus $|\operatorname{Re} z| \le |z|$, dass $\|\varphi\| \le \|\psi\|$ ist, andererseits aber aus

$$|\psi(x)|^2 = |\varphi(x)|^2 + |\psi(ix)|^2 \le 2\|\varphi\|^2\,\|x\|^2$$

auch $\|\psi\| \le \sqrt{2}\|\varphi\|$.

28. Sei E ein unendlich-dimensionaler reeller Banachraum. Zeige:

(a) Jede Vektorraumbasis von E ist überabzählbar. (2)

Lösung: Eine endliche Basis gibt es nach Voraussetzung nicht. Angenommen, es gäbe eine abzählbare Basis (b_n) von E. Dann sind $A_n := \operatorname{span}\{b_1, \dots, b_n\}$ abgeschlossene Unterräume von E mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = E$. Nach dem Satz von Baire gibt es dann $x_0 \in E$ und $r > 0$ mit $B(x_0, r) \subset A_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Dann ist wegen der Vektorraumstruktur auch

$$B(0,R) = \frac{R}{r}(B(x_0,r) - x_0) \subset A_{n_0}$$

für alle $R > 0$, also $A_{n_0} = E$. Das zeigt, dass E endlich-dimensional ist, was der Voraussetzung widerspricht.

(b) Es gibt eine konvexe Menge $C \subset H$ und einen Punkt $p \in E \setminus C$, die sich nicht trennen lassen, d.h. es gibt kein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) < \varphi(p)$ für alle $x \in C$. (2)

Lösung: Wir zeigen, dass es einen nicht abgeschlossenen Unterraum U von E gibt. Sei dazu $(b_n) \subset E$ eine linear unabhängige, abzählbare Familie von Vektoren; eine solche Familie existiert, da E unendlich-dimensional ist. Setze $U := \operatorname{span}\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $\overline{U}$ ein unendlich-dimensionaler Banachraum und besitzt somit nach dem ersten Aufgabenteil keine abzählbare Basis, was $\overline{U} \ne U$ zeigt.

Wähle $C := U$ und $p \in \overline{U} \setminus U$. Dann ist C sicherlich konvex. Gäbe es ein $\varphi \in E'$ mit $\varphi(x) < \varphi(p)$ für alle $x \in C$, so ist wegen der Vektorraumstruktur von C sicherlich $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in C$. Wegen Stetigkeit ist dann $\varphi(x) = 0$ für alle $x \in \overline{C}$, insbesondere also $\varphi(p) = 0$ im Widerspruch zur Annahme.

29. Sei E ein reeller normierter Raum. Ein *Halbraum* $H \subset E$ ist eine Menge der Form $H = \{x \in E : \varphi(x) \geq \alpha\}$ mit $\varphi \in E'$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige:

(a) Ist $(H_i)_{i\in I}$ eine Familie von Halbräumen in E, so ist $\bigcap_{i\in I} H_i$ abgeschlossen und konvex. (2)

Lösung: Durchschnitte abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen und Durchschnitte konvexer Mengen sind konvex. Es genügt also, sich zu überlegen, dass Halbräume abgeschlossen und konvex sind, was aber offensichtlich ist.

(b) Ist $C \subset E$ abgeschlossen und konvex, so gibt es eine Familie $(H_i)_{i\in I}$ von Halbräumen mit $C = \bigcap_{i\in I} H_i$. (2)

Lösung: Der Fall $C = \emptyset$ ist trivial. Weil einelementige Mengen kompakt und konvex sind, gibt es nach dem zweiten Trennungssatz zu jedem $x \notin C$ ein $\varphi_x \in E'$ und ein $\gamma_x \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_x(x) < \gamma_x \leq \varphi_x(y)$ für alle $y \in C$. Zu jedem $x \notin C$ definiere $H_x := \{y \in E : \varphi_x(y) \geq \gamma_x\}$. Dann ist $C \subset H_x$ und $x \notin H_x$ und folglich $C = \bigcap_{x\notin C} H_x$ wie behauptet, wobei wir die Konvention einhalten, dass Durchschnitte über eine leere Indexmenge der Gesamtraum seien.

(c) Ist E separabel und $C \subset E$ abgeschlossen und konvex, so gibt es eine abzählbare Familie $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Halbräumen mit $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n$. (3)

Lösung: Der Fall $C = \emptyset$ ist trivial. Wir definieren H_x ähnlichen wie im vorigen Aufgabenteil, sind aber bei der Wahl von φ_x und γ_x spezifischer. Für $x \notin C$ sei $d_x := \operatorname{dist}(x, C)$. Dann ist $d_x > 0$ wegen Abgeschlossenheit von C und $B(x, d_x) \subset C^c$ nach Definition des Abstands. Nach dem Korollar zum Basis-Trennungssatz gibt es dann $\varphi_x \in E'$, wobei wir ohne Einschränkung $\|\varphi_x\| = 1$ wählen, und $\gamma_x \in \mathbb{R}$ mit $\varphi_x(a) < \gamma_x \leq \varphi_x(y)$ für alle $a \in B(x, d_x)$ und alle $y \in C$. Wir zeigen, dass sogar $\varphi_x(x) \leq \gamma_x - d_x$ gilt. Sei nämlich zu $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < d_x$, $\varepsilon < 1$ ein $z \in E$ mit $\|z\| = 1$ und $\varphi_x(z) \geq 1 - \varepsilon$ gewählt. Dann ist $x + (d_x - \varepsilon)z \in B(x, d_x)$ und somit

$$\varphi_x(x) + (d_x - \varepsilon)(1 - \varepsilon) \leq \varphi_x(x) + (d_x - \varepsilon)\varphi_x(z) = \varphi_x(x + (d_x - \varepsilon)z) < \gamma_x.$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \to 0$ erhalten wir $\varphi_x(x) + d_x \leq \gamma_x$, also die Behauptung. Sei nun also zu jedem $x \in C^c$ die Halbebenen H_x wie im vorigen Aufgabenteil für diese speziellere Wahl von φ_x und γ_x gewählt.

Wir zeigen, dass $C = \bigcap_{x\in D} H_x$ gilt, falls D eine dichte Teilmenge von C^c ist. Da mit E auch C^c separabel ist, wie man leicht sieht, folgt hieraus die Behauptung. Die Inklusion

$$C = \bigcap_{x\notin C} H_x \subset \bigcap_{x\in D} H_x$$

ist klar. Sei nun $z \notin C$ beliebig und setze $r := \operatorname{dist}(z, C) > 0$. Wähle $x \in B(z, \frac{r}{2}) \cap D$. Dann ist $\operatorname{dist}(x, C) > \frac{r}{2}$ und somit nach Wahl von γ_x und φ_x auch

$$\varphi_x(x) \leq \gamma_x - d_x < \gamma_x - \frac{r}{2}.$$

Daraus erhalten wir

$$\varphi_x(z) \leq \varphi_x(x) + \|z - x\| < \gamma_x - \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = \gamma_x,$$

was $z \notin H_x$, also $z \notin \bigcap_{x\in D} H_x$ zeigt. Daraus folgt die Behauptung.

Bemerkung: Wählt man H_x wie im vorigen Aufgabenteil und ist D eine dichte Teilmenge von C^c, so gilt im Allgemeinen nicht $\bigcap_{x\in D} H_x = C$, was den zusätzliche Aufwand bei der Wahl der φ_x und γ_x nötig macht: Betrachtet man $E = \mathbb{R}^2$ und $C = \{0\}$ und schreibt $F := \{(0, x_2)\}$, so kann man zu jedem $x \in F^c$ das Funktional $\varphi_x(y) := -\operatorname{sgn}(x_1)y_1$ und $\gamma_x := -\frac{|x_1|}{2}$ wählen. Für $D := \mathbb{Q}^2 \cap F^c$ ergibt sich mit dieser Wahl $\bigcap_{x\in D} H_x = F \neq C$.

30. Sei E ein Hilbertraum und (x_n) eine Folge in E.

(a) Sei (x_n) beschränkt. Zeige, dass es eine Teilfolge (x_{n_k}) gibt, für die $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k}$ existiert! (3)

Tipp: Man kann sich auf den Fall $x_n \rightharpoonup 0$ zurückziehen.

Lösung: Sei $\|x_n\| \le M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da Hilberträume reflexiv sind, können wir nach Übergang zu einer Teilfolge, die wir wieder (x_n) nennen, annehmen, dass (x_n) schwach konvergiert.

Wir nehmen zuerst sogar $x_n \rightharpoonup 0$ an. Dann kann man sukzessive eine Teilfolge (x_{n_k}) finden, für die

$$|\,(x_{n_k} \mid x_{n_\ell})\,| \le \frac{1}{k^2\ell^2}$$

für $\ell > k$ gilt. Für diese Teilfolge gilt dann

$$\begin{aligned}\Big\|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k}\Big\|^2 &= \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^N \|x_{n_k}\|^2 + \frac{2}{N^2}\sum_{k<\ell\le N} |\,(x_{n_k} \mid x_{n_\ell})\,| \\ &\le \frac{M^2}{N} + \frac{2}{N^2}\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}\sum_{\ell=1}^\infty \frac{1}{\ell^2} \to 0,\end{aligned}$$

was $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \to 0$ zeigt.

Gilt allgemeiner $x_n \rightharpoonup x$, so ist $(x_n - x)$ beschränkt und es gilt $x_n - x \rightharpoonup 0$, also nach der vorigen Überlegung

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} - x = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^N (x_{n_k} - x) \to 0,$$

was die Behauptung $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \to x$ zeigt.

(b) Sei $C \subset E$ abgeschlossen und konvex. Es gelte $(x_n) \subset C$ und $x_n \rightharpoonup x$. Schlussfolgere aus dem vorigen Aufgabenteil, dass dann $x \in C$ gilt! (2)

Lösung: Es gelte $x_n \rightharpoonup x$. Laut Vorlesung ist (x_n) dann beschränkt. Wähle (x_{n_k}) wie im vorigen Aufgabenteil. Dann ist wegen Konvexität $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \in C$. Aus dem Beweis des vorigen Aufgabenteils oder einer einfachen Überlegung folgt $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^N x_{n_k} \to x$. Weil C abgeschlossen ist, zeigt dies $x \in C$.

31. Wir fassen wir die Einheitsvektoren $e_n \in \ell^1$ mittels der Auswertungsabbildung als Funktionale auf $\ell^\infty = (\ell^1)'$ auf. Zeige, dass (e_n) keine σ^*-konvergente Teilfolge besitzt, und schlussfolgere, dass ℓ^∞ nicht separabel ist! (2)

Lösung: Angenommen, (e_n) besitzt eine σ^*-konvergente Teilfolge (e_{n_k}). Dann gibt es $\varphi \in (\ell^\infty)'$ mit

$$x_{n_k} = \langle e_{n_k}, x\rangle \to \varphi(x)$$

für alle $x \in \ell^\infty$, was bedeutet, dass für jede beschränkte Folge die Teilfolge (x_{n_k}) konvergiert, was absurd ist, wie man sich anhand der Folge

$$x_\ell := \begin{cases} 0 & \ell \ne n_k \\ (-1)^k & \ell = n_k \end{cases}$$

sofort klarmacht. Da im Dualraum eines separablen Raums laut Vorlesung jede beschränkte Folge eine σ^*-konvergente Teilfolge besitzt, zeigt dies, dass ℓ^∞ nicht separabel ist.