Universität Ulm

Donnerstag, 16.12.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Funktionalanalysis: Blatt 8

32. Sei H ein Hilbertraum, $x \in H$ und (x_n) eine Folge in H mit $\|x_n\| \to \|x\|$ und $(x_n \mid y) \to (x \mid y)$ für jedes $y \in H$. Zeige, dass dann (x_n) gegen x konvergiert! (2)

33. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in \overline{B_X(0,1)}$ mit $\|x - y\| \geq \varepsilon$ stets $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta_\varepsilon$ gilt. Zeige:

(a) Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ gilt! (2)

(b) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex. (2)

34. Sei e_n der n.te Einheitsvektor in $c_0 \subset \ell^\infty$, und definiere $s_n := \sum_{k=1}^{n} e_k$. Zeige:

(a) Die Folge (s_n) ist eine schwache Cauchy-Folge in ℓ^∞, d.h. für jedes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist $(\varphi(s_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. (2)

(b) Die Folge (s_n) ist nicht schwach konvergent in ℓ^∞. (2)

35. (a) Sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ genau dann schwach gegen ein $x \in \ell^p$ konvergiert, wenn (x_n) in ℓ^p beschränkt ist und die Komponentenfolgen $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gegen x_k konvergieren. (2)

(b) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für ℓ^1 richtig? (2)

(c) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für c_0 richtig? (2)

(d) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für ℓ^∞ richtig? (2)

36. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Zeige, dass es zu jedem $\varphi \in L^1(\Omega)'$ ein $h \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|h\|_\infty = \|\varphi\|$ gibt, für das $\varphi(f) = \int_\Omega fh \, \mathrm{d}\mu$ für alle $f \in L^1(\Omega)$ gilt! (2)