Universität Ulm

Donnerstag, 16.12.2010

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20

Lösungen Funktionalanalysis: Blatt 8

32. Sei H ein Hilbertraum, $x \in H$ und (x_n) eine Folge in H mit $\|x_n\| \to \|x\|$ und $(x_n \mid y) \to (x \mid y)$ für jedes $y \in H$. Zeige, dass dann (x_n) gegen x konvergiert! (2)

Lösung: Dies folgt unmittelbar aus der nachfolgenden Aufgabe, ergibt sich aber auch aus

$$\|x_n - x\|^2 = \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x_n \mid x) + \|x\|^2 \to \|x\|^2 - 2\operatorname{Re}(x \mid x) + \|x\|^2 = 0.$$

33. Ein Banachraum X heißt *gleichmäßig konvex*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt mit der Eigenschaft, dass für alle $x, y \in \overline{B_X(0,1)}$ mit $\|x - y\| \geq \varepsilon$ stets $\|\frac{x+y}{2}\| \leq 1 - \delta_\varepsilon$ gilt. Zeige:

(a) Sei X ein gleichmäßig konvexer Banachraum. Eine Folge (x_n) in X konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$ gilt! (2)

Lösung: Die eine Implikation ist klar, und der Fall $x = 0$ ist klar. Sei nun also $x \neq 0$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \rightharpoonup x$ und $\|x_n\| \to \|x\|$. Ohne Einschränkung sei $\|x\| = 1$, da wir dies durch Reskalierung erreichen können. Wir nehmen an, dass (x_n) nicht gegen x konvergiert. Nach Übergang zu einer Teilfolge können wir dann $\|x_n - x\| \geq \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ annehmen. Sei $\delta := \delta_{\varepsilon/2} \in (0,1]$ wie in der Definition der gleichmäßigen Konvexität gewählt. Dann gilt $\|\frac{x_n}{1+\delta} - \frac{x}{1+\delta}\| \geq \frac{\varepsilon}{1+\delta} \geq \frac{\varepsilon}{2}$, und für hinreichend große n ist $\|\frac{x_n}{1+\delta}\| \leq 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\varphi \in X'$ mit $\|\varphi\| = 1$ und $\varphi(x) = \|x\|$. Aus diesen Überlegungen erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 = \|x\| = \varphi(x) \leftarrow \frac{\varphi(x_n) + \varphi(x)}{2} &= \frac{\varphi\big(x_n + x\big)}{2} \leq \frac{\|x_n + x\|}{2} \\ &= (1+\delta)\left\| \frac{\frac{x_n}{1+\delta} + \frac{x}{1+\delta}}{2} \right\| \leq (1+\delta)(1-\delta) = 1 - \delta^2 < 1 \end{aligned}$$

für große n, einen Widerspruch.

(b) Jeder Hilbertraum ist gleichmäßig konvex. (2)

Lösung: Nach der Parallelogrammgleichung gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2,$$

woraus für $x, y \in \overline{B_H(0,1)}$ mit $\|x - y\| \geq \varepsilon$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2}\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) - \frac{1}{4}\|x - y\|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} =: (1-\delta)^2$$

folgt mit einem $\delta > 0$.

34. Sei e_n der n.te Einheitsvektor in $c_0 \subset \ell^\infty$, und definiere $s_n := \sum_{k=1}^n e_k$. Zeige:

(a) Die Folge (s_n) ist eine schwache Cauchy-Folge in ℓ^∞, d.h. für jedes $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist $(\varphi(s_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. (2)

Lösung: Sei $\varphi \in c_0'$. Es gibt $y \in \ell^1$ mit $\varphi(x) = \sum_{k=1}^\infty x_k y_k$. Daher ist $\varphi(s_n) = \sum_{k=1}^n y_k$, was wegen (absoluter) Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^\infty y_k$ die Behauptung für $\varphi \in c_0'$ zeigt. Für beliebiges $\varphi \in (\ell^\infty)'$ ist aber $\varphi|_{c_0} \in c_0'$, woraus die Behauptung folgt.

(b) Die Folge (s_n) ist nicht schwach konvergent in ℓ^∞. (2)

Lösung: Falls (s_n) in ℓ^∞ schwach gegen ein $s \in \ell^\infty$ konvergiert, so hat man insbesondere koordinatenweise Konvergenz, da die Koordinatenauswertungen stetige Funktionale sind, woraus $s = \mathbb{1}$ folgt. Ist aber $\varphi \in (\ell^\infty)'$ eine stetige Fortsetzung des Funktionals $\lim \in c'$ auf ℓ^∞, so erhält man daraus $0 = \varphi(s_n) \to \varphi(\mathbb{1}) = 1$, also einen Widerspruch.

Man hätte alternativ auch benutzen können, dass abgeschlossene, konvexe Mengen schwach abgeschlossen sind, also (s_n) bereits in c_0 schwach konvergieren müsste.

35. (a) Sei $1 < p < \infty$. Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \ell^p$ genau dann schwach gegen ein $x \in \ell^p$ konvergiert, wenn (x_n) in ℓ^p beschränkt ist und die Komponentenfolgen $(x_{n,k})_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ gegen x_k konvergieren. (2)

Lösung: Die eine Implikation ist wegen der Stetigkeit der Koordinatenfunktionale klar. Sei nun also (x_n) eine in ℓ^p beschränkte Folge, die komponentenweise gegen $x \in \ell^p$ konvergiert. Angenommen, es gilt nicht $x_n \rightharpoonup x$. Nach Übergang zu einer Teilfolge darf man dann annehmen, dass es $\varphi \in (\ell^p)'$ gibt mit $\varphi(x_n) \not\to \varphi(x)$. Weil ℓ^p reflexiv ist, können wir nach nochmaligem Übergang zu einer Teilfolge annehmen, dass (x_n) schwach gegen ein y konvergiert. Insbesondere gilt dann $x_{n,k} \to y_k$, woraus $x = y$ folgt, im Widerspruch zur Annahme.

Bemerkung: Mit diesem Argument kann man auch zeigen, dass der punktweise Grenzwert einer beschränkten Folge in ℓ^p wiederum in ℓ^p liegt.

(b) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für ℓ^1 richtig? (2)

Lösung: Nein. Ein Gegenbeispiel sind die Einheitsvektoren (e_n). Die Folge ist beschränkt und konvergiert komponentenweise gegen 0. Aber für das Funktional φ, das durch $\varphi(y) := \sum_{k=1}^\infty y_k$ gegeben ist, gilt $\varphi(e_n) = 1 \not\to 0$.

(c) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für c_0 richtig? (2)

Lösung: Die koordinatenweise Konvergenz kann man auch als $\langle e_k, x_n\rangle \to \langle e_k, x\rangle$ für alle $k \in \mathbb{N}$ schreiben, wobei e_k den k.ten Einheitsvektor in ℓ^1 bezeichnet. Das bedeutet, dass (x_n) als Folge in $\ell^\infty = (\ell^1)'$ auf einer Menge mit dichtem Aufspann konvergiert. Weil die Folge beschränkt ist, konvergiert sie dann in jedem Punkt von ℓ^1, also $x_n \rightharpoonup^* x$ in ℓ^∞, was gerade $x_n \rightharpoonup x$ in c_0 bedeutet. Die andere Implikation ist auch in diesem Fall wieder trivial.

Bemerkung: In diesem Fall ist es im Gegensatz zu ℓ^p wesentlich, dass wir $x \in c_0$ bereits voraussetzen, weswegen wir auch nicht das gleiche Argument wie im ersten Aufgabenteil verwenden können. Ohne diese Bedingung wird die Aussage nämlich falsch, wie die Folge (s_n) aus der vorigen Aufgabe zeigt.

(d) Ist die Aussage des ersten Aufgabenteils auch für ℓ^∞ richtig? (2)

Lösung: Nein. Wir haben in der vorigen Aufgabe mit der Folge (s_n) ein Gegenbeispiel kennengelernt.

36. Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum. Zeige, dass es zu jedem $\varphi \in L^1(\Omega)'$ ein $h \in L^\infty(\Omega)$ mit $\|h\|_\infty = \|\varphi\|$ gibt, für das $\varphi(f) = \int_\Omega fh \,\mathrm{d}\mu$ für alle $f \in L^1(\Omega)$ gilt! (2)

Lösung: Definiere $\lambda(A) := \varphi(\mathbb{1}_A)$. Dann ist λ nach dem Satz von Lebesgue ein σ-additives Funktional auf Σ und es gilt $\lambda(\emptyset) = 0$. Zudem ist $\lambda(A) = 0$ für $\mu(A) = 0$. Nach dem Satz von Radon-Nikodym gibt es also ein $h \in L^1(\Omega)$ mit

$$\varphi(\mathbb{1}_A) = \lambda(A) = \int_A h \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega h\,\mathbb{1}_A \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $A \in \Sigma$. Wegen Linearität ist dann $\varphi(f) = \int_\Omega hf \,\mathrm{d}\mu$ für alle einfachen Funktionen f und wegen Stetigkeit somit für alle $f \in L^\infty(\Omega)$.

Für $c \geq 0$ sei $A_c \coloneqq \{|h| \geq c\}$ und $f_c \coloneqq \overline{\operatorname{sgn}(h)}\, \mathbb{1}_{A_c}$. Dann ist

$$c\mu(A_c) \leq \int_{A_c} |h| = \int_\Omega hf = \varphi(f) \leq \|\varphi\|\, \|f\|_1 = \|\varphi\|\, \mu(A_c).$$

Dies zeigt $\mu(A_c) = 0$ für $c > \|\varphi\|$, also $\|h\|_\infty \leq \|\varphi\|$.

Also ist $f \mapsto \int_\Omega hf$ stetig auf $L^1(\Omega)$. Weil $L^\infty(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ ist, zeigt dies $\varphi(f) = \int_\Omega hf$ für alle $f \in L^1(\Omega)$. Die Abschätzung $\|\varphi\| \leq \|h\|_\infty$ ist nun trivial.