Universität Ulm

Donnerstag, 13.01.2011

Prof. Dr. W. Arendt
Robin Nittka
Wintersemester 2010/11
Punktzahl: 20+20

Funktionalanalysis: Blatt 9

37. Sei E ein reeller Banachraum, E_+ ein abgeschlossener Kegel in E und $x \in E$. Zeige, dass x genau dann in E_+ liegt, wenn $\varphi(x) \geq 0$ für jedes bezüglich E_+ positive Funktional $\varphi \in E'$ gilt, vgl. Aufgabe 25. (2)

38. Sei X ein Banachraum und (x_n) eine Folge in X, die schwach gegen ein $x \in X$ konvergiert. Zeige, dass es dann Konvexkombinationen $y_n := \sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} x_k$ gibt, d.h. $\lambda_{n,k} \geq 0$ und $\sum_{k=1}^{m_n} \lambda_{n,k} = 1$, für die $y_n \to x$ gilt. (2)
Tipp: Betrachte $C := \overline{\operatorname{conv}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$.

39. Sei (M, d) ein metrischer Raum und X ein Banachraum. Bezeichne $F(M, X)$ die Menge aller Funktionen von M nach X. Eine Menge $A \subset F(M, X)$ heißt *gleichstetig*, falls es zu jedem $x \in M$ und $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, mit dem $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$ für alle $f \in A$ und $y \in B(x, \delta)$ gilt. Zeige:

(a) Ist M kompakt, so ist M separabel. (2)

(b) Sei (f_n) eine Folge in $F(M, X)$ und sei $N \subset M$ abzählbar. Falls die Mengen $B_x := \{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ für jedes $x \in N$ relativ kompakt sind (d.h. $\overline{B}_x$ ist kompakt), so gibt es eine Teilfolge von (f_n), die auf N punktweise konvergiert. (2)

(c) Ist $(f_n) \subset F(M, X)$ gleichstetig und punktweise konvergent auf einer Menge $N \subset M$, so konvergiert (f_n) gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von $\overline{N}$. (2)
Hinweis: Es darf benutzt werden, dass für kompaktes K der Raum $\mathrm{C}(K, X)$ der stetigen Funtionen von K nach X bezüglich der Supremumsnorm vollständig ist.

(d) Sei M kompakt. Eine Menge $A \subset \mathrm{C}(M, X)$ ist genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichstetig ist und $\{f(x) : f \in A\}$ für alle $x \in M$ relativ kompakt ist. (2)

40. Seien E und F Banachräume und $T \colon E \to F$ linear. Untersuche (Beweis oder Gegenbeispiel), welche Implikationen zwischen den folgenden Aussagen über T gelten: (2)

(i) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \to Tx$
(ii) $x_n \to x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$
(iii) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \to Tx$
(iv) $x_n \rightharpoonup x \Rightarrow Tx_n \rightharpoonup Tx$

41. Eine lineare Abbildung $\mathrm{Lim} \colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banachlimes*, falls

(L1) $\mathrm{Lim}(\mathbb{1}) = 1$;

(L2) $\mathrm{Lim}(x) \geq 0$, falls $x_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$;

(L3) $\mathrm{Lim}(Lx) = \mathrm{Lim}(x)$, wobei $Lx := (x_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$.

Zeige:

(a) Sei Lim ein Banachlimes. Dann gilt:

(i) $\mathrm{Lim} \in (\ell^\infty)'$ mit $\|\mathrm{Lim}\| = 1$. (1)

(ii) $\liminf x \leq \mathrm{Lim}(x) \leq \limsup x$ für alle $x \in \ell^\infty$. (1)

(iii) $\operatorname{Lim}(x) = \lim x$ für $x \in c$. (1)

(iv) Ist $x \in \ell^\infty$ periodisch mit Periodenlänge $p \in \mathbb{N}$, so ist $\operatorname{Lim}(x) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} x_k$. (2)

(v) Es gibt $x, y \in \ell^\infty$ mit $\operatorname{Lim}(x \cdot y) \neq \operatorname{Lim}(x) \operatorname{Lim}(y)$, wobei $x \cdot y := (x_n y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, d.h. Lim ist nicht multiplikativ. (1)

(b) Es gibt einen Banachlimes. (+2)
Tipp: Zeige, dass $p(x) := \limsup \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$ ein sublineares Funktional auf ℓ^∞ definiert.

42. Sei E ein separabler Banachraum und (x_k) eine abzählbare Teilmenge von E mit $\|x_k\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\overline{\operatorname{span}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}} = E$. Setze

$$\|x'\|_* := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle x', x_k \rangle|}{2^k}$$

für $x' \in E'$. Zeige:

(a) $\|\cdot\|_*$ ist eine Norm auf E' mit $\|x'\|_* \leq \|x'\|$ für alle $x' \in E'$. (+2)

(b) Sei (x'_n) eine beschränkte Folge in E', d.h. $\sup_n \|x'_n\| < \infty$, und sei $x' \in E'$. Es gilt genau dann $x'_n \rightharpoonup^* x'$, wenn $\|x'_n - x'\|_* \to 0$ erfüllt ist. (+2)

(c) Die abgeschlossene Einheitskugel $B_{E'}$ von $(E', \|\cdot\|)$ ist kompakt in $(E', \|\cdot\|_*)$. (+2)

(d) Versieht man $B_{E'}$ mit der von $\|\cdot\|_*$ induzierten Metrik, so erhält man einen vollständigen metrischen Raum, aber der Raum $(E', \|\cdot\|_*)$ ist nicht vollständig, falls E unendlichdimensional ist. (+2)

43. Sei E ein separabler Banachraum und $\|\cdot\|_*$ wie in Aufgabe 42. Sei F ein abgeschlossener Unterraum von E. Zeige:

(a) Sei $A := \{x' \in B_{E'} : x'|_F = 0\}$ und $(x'_n) \subset B_{E'}$. Es gelte $\langle x'_n, x \rangle \to 0$ für alle $x \in F$. Dann folgt $\operatorname{dist}_*(x'_n, A) := \inf_{y' \in A} \|x'_n - y'\|_* \to 0$. (+2)

(b) Ist F isomorph zu c_0, so ist F projezierbar. (+2)
Tipp: Orientiere dich am Beweis von Aufgabe 26 und verwende Aufgabenteil (a).

44. Sei E ein separabler Banachraum und $\|\cdot\|_*$ wie in Aufgabe 42. Sei (y_n) eine Folge in E mit $y_n \rightharpoonup 0$. Zeige:

(a) Sei $\varepsilon > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $A_k := \{y' \in B_{E'} : \left|\langle y', y_n \rangle\right| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k\}$ abgeschlossen in $(B_{E'}, \|\cdot\|_*)$. (+2)

(b) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $k_0 \in \mathbb{N}$, $y'_0 \in B_{E'}$ und $r_0 > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $y' \in B_{E'}$ mit $\|y' - y'_0\|_* < r_0$ die Abschätzung $|\langle y', y_n \rangle| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq k_0$ gilt. (+2)
Tipp: Satz von Baire

(c) Ist $E = \ell^1$, so gilt $y_n \to 0$; somit konvergiert eine Folge in ℓ^1 genau dann in Norm, wenn sie schwach konvergiert. (+2)
Tipp: Sei ohne Einschränkung $\|y_n\|_1 \leq 1$. Wähle $x_k := e_k$ und betrachte $y'_n \in (\ell^1)' = \ell^\infty$ mit $y'_{n,i} := y'_{0,i}$ für $i \leq i_0$ und $y'_{n,i} := \overline{\operatorname{sgn} y_{n,i}}$ für $i > i_0$ mit einem $i_0 \in \mathbb{N}$.